

Kalibrierung von Fluxgate Magnetometern mittels Relativbewegungen zwischen Sensor und Magnetfeld

Von der Gemeinsamen Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Technischen Universität Carola Wilhelmina
zu Braunschweig

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
(Dr.rer.nat.)

genehmigte
D i s s e r t a t i o n

von Hans-Ulrich Auster
aus Belzig

Meinem Vater zum 65. Geburtstag

1. Referentin oder Referent:	Prof. Dr. K.H. Glaßmeier
2. Referentin oder Referent:	Prof. Dr. U. Motschmann
eingereicht am:	20. 04. 2000
mündliche Prüfung (Disputation) am:	05. 07. 2000

Inhaltsverzeichnis:

1	Einleitung.....	3
1.1	Einordnung und Zielstellung der Arbeit	3
1.2	Die Kalibrierung von Fluxgate Magnetometern allgemein	5
1.3	Die Kalibrierung von Fluxgate Magnetometern mittels Relativbewegungen.....	8
2	Funktionsweise und Fehlerquellen von Fluxgate Magnetometern	10
2.1	Modellierung des Entstehungsprozesses der feldproportionalen zweiten Harmonischen unter Berücksichtigung der Sensor- und Anregungsfehler	10
2.1.1	Das Sensormodell	10
2.1.2	Das Anregungsmodell	13
2.1.3	Vergleich Modell - Praxis.....	18
2.2	Berechnung der Ausgangsspannung eines symmetrischen Sensors	22
2.2.1	Die Berechnung der Frequenzanteile für den idealen Sensor.....	22
2.2.2	Einfluß der Asymmetrie der Anregung	24
2.2.3	Einfluß eines durch den Anregungsstrom aufgeprägten Gleichfeldes.....	25
2.2.4	Einfluß der Asymmetrie der Hysterese.....	26
2.2.5	Zusammenstellung der Fehlereinflüsse bei einem symmetrischen Sensor.....	28
2.3	Berechnung der Ausgangsspannung eines asymmetrischen Sensors.....	29
2.3.1	Berechnung der Frequenzanteile bei einem Einzelkernsensor	29
2.3.2	Einfluß der Asymmetrie der Anregung	30
2.3.3	Einfluß eines durch den Anregungsstrom aufgeprägten Gleichfeldes.....	32
2.3.4	Einfluß der Asymmetrie der Hysterese.....	32
2.3.5	Zusammenstellung der Fehlereinflüsse bei einem asymmetrischen Sensor.....	33
2.4	Berechnung der magnetischen Achse eines Sensors unter Berücksichtigung der Feldgegenkopplung.....	34
2.5	Ursachen nichtlinearer Querfeldeinflüsse bei Ringkernsensoren	39
2.5.1	Querfeldeinflussung durch asymmetrische Flußerzeugung im Ringkern.....	39
2.5.2	Querfeldeinflussung durch Rückwirkung auf den Anregungsstrom.....	40
3	Parametrisierung von Magnetometerfehlern und Relativbewegung	44
3.1	Parametrisierung der Relativbewegung Sensor - Magnetfeld.....	44
3.2	Parametrisierung der Magnetometerfehler.....	48
4	Analytische Untersuchung des aus fehlerbehafteten Komponenten berechneten Magnetfeldbetrages.....	50
4.1	Strategie der analytischen Untersuchung	50
4.2	Der Einfluß der Nullpunkte	58
4.2.1	Die Ableitung des Betrages nach φ	59
4.2.2	Die Ableitung des Betrages nach ψ	60
4.2.3	Die Ableitung des Betrages nach ϑ	61
4.2.4	Zusammenfassung der Analyse der Bestimmbarkeit von Nullpunktsfehlern	62
4.3	Der Einfluß des Skalenwertes	65

4.3.1	Die Ableitung des Betrages nach φ	66
4.3.2	Die Ableitung des Betrages nach ψ	68
4.3.3	Die Ableitung des Betrages nach ϑ	70
4.3.4	Zusammenfassung der Analyse der Bestimmbarkeit von Skalenwertfehlern	72
4.4	Der Einfluß der Abweichung von der Orthogonalität	75
4.4.1	Die Ableitung des Betrages nach φ	77
4.4.2	Die Ableitung des Betrages nach ψ	80
4.4.3	Die Ableitung des Betrages nach ϑ	83
4.4.4	Zusammenfassung der Analyse der Bestimmbarkeit von Orthogonalitätsfehlern	86
5	Überprüfung an Beispielen	91
5.1	Kalibrierung eines Magnetometers mittels freier Sensorbewegung	92
5.2	Kalibrierung mit eingeschränkten Randbedingungen	96
5.3	Sonderfälle der Rotation	98
6	Zusammenfassung der Ergebnisse	106
7	Literaturverzeichnis	109

1 Einleitung

1.1 Einordnung und Zielstellung der Arbeit

Alexander v. Humboldt konnte 1799 auf seiner Expedition nach Südamerika mit Hilfe der Messung der Schwingungsperiode eines im Schwerpunkt gelagerten Magneten die Stärke des Magnetfeldes nur relativ bestimmen. Er stellte fest, daß die Feldstärke vom Äquator aus sowohl nach Norden als auch nach Süden hin zunimmt [Jacobs 1987]. Mit der absoluten Bestimmung der Horizontalfeldstärke gelang C.F. Gauß 1832 erstmalig die „Kalibrierung eines Magnetometers“. Er nutzte einen Magneten sowohl zur Ermittlung der Schwingungsperioden als auch zur Auslenkung einer Magnetnadel. Die Experimente lieferten jeweils eine Gleichung, in der das magnetische Moment des Magneten und die Horizontalfeldstärke als Unbekannte enthalten waren [Kertz et al. 1968]. Somit konnte er das Meßinstrument (den Magneten) kalibrieren und die Horizontalfeldstärke bestimmen. Im metrologischen Sinn handelte es sich um eine Absolutmessung, da die Maßeinheit für das Magnetfeld direkt auf die Größen Zentimeter, Gramm und Sekunde (CGS-System) zurückgeführt werden konnte. Auf dem Auslenkversuch basierende „Magnetische Theodoliten“ werden bis zur heutigen Zeit zur Bestimmung der Horizontalfeldstärke eingesetzt [Chapman 1951].

Mit der sich im 19. Jahrhundert entwickelnden klassischen Elektrodynamik wurden die Grundlagen für die Berechnung magnetischer Felder um stromdurchflossene Leiter geliefert. 1820 wurde von Biot und Savart das Gesetz, das den Strom in einem unendlich langen Leiter mit dem von ihm erzeugten Magnetfeld verbindet, empirisch gefunden. Die Magnetfeldlinien bilden konzentrische Kreise um den Leiter. Die Amplitude des Magnetfeldes ist proportional dem Strom und umgekehrt proportional zum Abstand des Leiters. Somit konnten Magnetfelder definiert durch Ströme erzeugt werden. Ampere konnte 1825 die Beziehung zwischen der magnetischen Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter und dem sie erzeugenden Magnetfeld bestimmen. Dank dieses Zusammenhanges konnte die Maßeinheit des Stromes (Ampere) über die Kraftwirkung der Magnetfelder zweier stromdurchflossener Leiter an das CGS-System angeschlossen werden.

Für praktische Anwendungen wurde der unendlich lange Leiter durch Spulen ersetzt. 1881 entwickelte Helmholtz eine aus zwei Ringen bestehende Spule, dessen Verhältnis von Abstand zu Durchmesser hinsichtlich der Feldhomogenität im Innenraum optimiert wurde. Fenselau (1929) und Braunbeck (1934) verbesserten die Homogenität im Innenraum durch die Verwendung eines zweiten Spulenringpaares. Mit der Spule eröffnete sich die Möglichkeit, andere magnetfeldabhängige Effekte an das CGS-System anzuschließen. Das dem Protonenmagnetometer zu Grunde liegende temperaturunabhängige gyromagnetische Verhältnis läßt sich nicht auf Meter, Gramm oder Sekunde zurückführen, kann aber über Spulen experimentell an das CGS-System angeschlossen [Forkert 1986] werden.

Somit erfolgt heutzutage, alternativ zur klassischen Absolutmessung, die Kalibrierung von Magnetometern über die Hilfsgrößen Strom oder gyromagnetisches Verhältnis. Beide Hilfsgrößen werden auch zur Kalibrierung von Fluxgate Magnetometern genutzt. Die Ausgangsspannung eines Fluxgate Magnetometers läßt sich zwar über das Induktionsgesetz

direkt auf die Grundeinheiten zurückführen, jedoch beinhaltet die Übertragungsfunktion fehlerbehaftete Größen wie zum Beispiel die Kennlinie des weichmagnetischen Materials. Somit muß die Übertragungsfunktion ebenfalls experimentell bestimmt werden. Im Gegensatz zum Protonenmagnetometer wird hier keine physikalische Konstante allgemeingültig bestimmt, sondern jedes Instrument muß individuell angeschlossen werden. Dieser Anschluß wird als Kalibrierung des Fluxgate Magnetometers bezeichnet.

Sucht man nach Kalibriermethoden oder Anbietern von Kalibrierdienstleistungen liegt es nah, bei Institutionen, die für Meß- und Eichstandards zuständig sind, nachzufragen. Obwohl gerade das Magnetfeld die Brücke zwischen den elektrischen Maßeinheiten und dem CGS-System schlägt, findet sich jedoch in den autorisierten metrologischen Einrichtungen (BAM, PTB) keine Möglichkeit, Magnetometer für kleine Felder zu kalibrieren. Die Kalibrierung geophysikalisch genutzter Magnetometer bleibt die Aufgabe der Hersteller oder Nutzer. Genutzt werden hierzu Spulensysteme oder Referenzmagnetometer an Instituten oder Observatorien. Es handelt sich hierbei um zum Teil aufwendig ausgestattete Einrichtungen, die ortsgebunden sind. Aus diesem Grund müssen Instrumente zu Kalibrierzwecken vom Meßort zum Kalibrierort gebracht werden. Der Transport der Meßinstrumente und die veränderten Umgebungsbedingungen sind nachteilig für die Kalibrierengenauigkeit. Eine Wiederholung der Kalibrierung kann nur in zeitlich großen Abständen erfolgen.

Als Ergänzung zu diesen ortsfesten Kalibriermöglichkeiten wird in dieser Arbeit eine Kalibriermethode vorgestellt, die einen minimalen instrumentellen Aufwand benötigt und unabhängig vom Meßort ist.

Der Arbeit wird eine Analyse der Fehlerursachen von Fluxgate Magnetometern (Abschnitt 2) vorangestellt. Auf Grundlage eines Sensor- und Anregungsmodells werden Fehlereinflüsse berechnet. Ziel ist es, den Entstehungsmechanismus der zur Fehlerparametrisierung verwendeten Fehlergruppen Nullpunktabweichung, Skalenwertabweichung und Orthogonalitätsabweichung zu beschreiben. Es wird begründet, daß die Skalenwerte und die Orthogonalitätsabweichung als feldunabhängige Größen angenommen werden können.

In Abschnitt 3 werden die Fehlergruppen durch die Einführung von Matrizen und die Sensorbewegung durch eine Koordinatentransformation um die drei Eulerschen Winkel parametrisiert. Rotation und Nutation als typische Bewegungen von Satelliten können als Spezialfälle simuliert werden.

In der in Abschnitt 4 folgenden analytischen Untersuchung des aus fehlerbehafteten Komponenten berechneten Magnetfeldbetrages werden die Fehlergruppen separat eingeführt, der Betrag berechnet und die Ableitung des Betrages nach den Eulerschen Winkeln gleich Null gesetzt. Die Lösungen der entstehenden Gleichungssysteme sind Flächen zweiter Ordnung. Ziel der Diskussion dieser Lösungsmengen ist der Nachweis der Unabhängigkeit der Einflüsse einzelner Fehlergruppen auf den Betrag und die Bestimmung der zur Kalibrierung notwendigen Bewegungsvielfalt.

Im Abschnitt 5 wird auf Grundlage der Analyse die Kalibrierung an Hand von Spezialfällen demonstriert. Es standen insgesamt vier Magnetometer zu Testzwecken zur Verfügung. Die Magnetometer für die Raumstation MIR und für das Forschungsschiff Polarstern wurden in den Meßeinrichtungen der Magson GmbH in Jeseriger Hütten getestet. Weiterhin wurde ein Fluxgate Sensor für die Cluster 2 Mission im Anschluß an die Standardkalibrierung in den

Meßeinrichtungen der TU-Braunschweig in Magnetsrode mittels Drehung im reduzierten Feld getestet. Als viertes Magnetometer diente das Flugmuster auf dem rotierenden Satelliten Equator-S. Möglichkeiten und Grenzen des vorgeschlagenen Kalibrierverfahrens werden diskutiert.

1.2 Die Kalibrierung von Fluxgate Magnetometern allgemein

Ziel der Kalibrierung ist es, den Meßfehler zu bestimmen und zu eliminieren. Hierzu muß die Übertragungsfunktion zwischen dem real existierendem Feldvektor \mathbf{B} (in der Arbeit äußeres Feld genannt) und dem gemessenen Feldvektor \mathbf{B}_M bestimmt werden.

Einleitend soll auf Fehlerursachen, Fehlerkategorien sowie allgemein auf Kalibrierverfahren für Fluxgate Magnetometer eingegangen werden.

Hauptglied in der Übertragungskette, und somit auch Schwerpunkt in der Analyse von Fehlern, ist das Magnetometer selbst. Die Übertragungsfunktion ist jedoch nicht nur vom Übertragungsverhalten des Magnetometers, sondern auch von externen Einflüssen abhängig. Beispiele für externe Einflüsse sind hart- und weichmagnetische Materialien in Sensornähe, elektromagnetische Störfelder sowie die Instabilität der Aufstellung des Sensors.

So werden Sensoren auf frostfrei gegründeten Pfeilern aus eisenfreiem Sandstein montiert, kardanisch aufgehängt oder über eine optische Bank mit Sternsensoren gekoppelt. In Observatorien hält man magnetische Störquellen fern von Meßplätzen. In der Schifffahrt, beim Militär und in einigen industriellen Anwendungen besitzen transportable Teile Schutzabstände, die zu magnetischen Meßeinrichtungen einzuhalten sind. In der Weltraumfahrt werden Satelliten bzw. deren Baugruppen magnetisch vermessen, um den Einfluß von Störgrößen am Ort des Magnetfeldsensors zu berechnen [Auster et al. 1990]. Mehrere, in unterschiedlichem Abstand zum Satelliten positionierte Sensoren werden genutzt, um die Änderung der Störgröße zu eliminieren [Ness et al. 1971] [Neubauer 1975].

Sowohl die Übertragungseigenschaften des Magnetometers als auch die externen Einflüsse sind von der Umgebungstemperatur abhängig. Vorrangig ist man bemüht, Temperaturschwankungen zu unterdrücken. In allen Bereichen der Magnetfeldmessung gibt es dafür eine Vielzahl von Beispielen. Meßplätze, zum Beispiel das Variationshaus im Geomagnetischen Observatorium Niemegk [Schmidt 1912] oder die Kalibriereinrichtung in Magnetsrode [Kertz et al. 1968], werden temperiert. Feldstationen werden vergraben, um den zur täglichen Variation des Erdmagnetfeldes synchronen Temperaturgang am Ort des Sensors zu minimieren [Magnes 1999]. Sensoren von Weltraumexperimenten werden thermisch isoliert, um die thermische Zeitkonstante zu erhöhen. Ziel ist es, beim Eintritt in Schattenphasen den Temperaturgradienten zu reduzieren. Um den verbleibenden Temperaturgang bei der Datenauswertung zu berücksichtigen, wird die Temperatur an mehreren Stellen des Magnetometers gemessen (gewöhnlich am Sensor und in der Elektronik). Die Ermittlung der Abhängigkeit der Übertragungsfunktion von der Temperatur ist eine der Zielstellungen der Kalibrierung. Für die Temperierung der Sensoren sind aufwendige Anlagen in einer magnetisch störfreien Umgebung notwendig. Die Meßeinrichtungen in Magnetsrode und Garchy (Frankreich) bieten diese Möglichkeit.

Die Übertragungseigenschaften unterliegen weiterhin langperiodischen Schwankungen, die auf das Langzeitverhalten elektronischer Bauelemente, Alterungsprozessen von Materialien oder mechanischen Setzungserscheinungen zurückzuführen sind. Für die Bestimmung dieser

Eigenschaft ist eine wiederholte Kalibrierung oder der ständige Vergleich mit einem Referenzinstrument notwendig.

Folglich ist die Übertragungsfunktion eines Fluxgate Magnetometers keine Konstante, sondern eine Funktion von Temperatur und Zeit.

Da das Magnetfeld eine vektorielle Größe ist, können sowohl der Betrag der Komponenten als auch deren Richtungen fehlerbehaftet sein. Der Fehler im Betrag wird durch den Nullpunkt, den Skalenwert und die Nichtlinearität des Skalenwertes beschrieben. Die Richtung der Komponente hängt von der Orientierung des Sensordreibeins und von der Orientierung der Sensorachsen untereinander ab.

Die Genauigkeitsanforderung an die Bestimmung der einzelnen Fehlergruppen ist von der Meßaufgabe und dem Meßort abhängig. Allgemein kann man zwischen Messungen im Erdfeld und Messungen im reduzierten Feld unterscheiden.

Die Anforderung an die Genauigkeit der Bestimmung von Nullpunkt, Skalenwert, Linearität und Sensororientierung ergibt sich aus dem Verhältnis von geforderter absoluter Meßgenauigkeit zu äußerem Feld. Typisches Ziel der Messung im reduzierten Feld ($<100\text{nT}$ zum Beispiel im Weltraum) ist eine absolute Genauigkeit von $0,1\text{nT}$. Im Erdfeld ($>20.000\text{nT}$) liegt die Anforderung an die absolute Genauigkeit im Bereich von Nanotesla (siehe [Nielsen et al. 1995]). Die Anforderung an die relative Meßgenauigkeit (Bestimmung der Variation des Feldes) kann um mehrere Größenordnungen über der Anforderung an die absolute Genauigkeit liegen. Da die Feldvariation klein gegenüber der absoluten Feldstärke ist, begrenzen nicht die oben aufgeführten Fehlergruppen, sondern das Rauschspektrums des Ringkerns oder die Auflösung des AD-Wandlers die relative Meßgenauigkeit. Beispiele für hochauflösende Fluxgate Magnetometer sind das Magnetometer auf Equator-S (2pT) [Fornacon et al. 1999] oder Magnetometer für magnetotellurische Anwendungen (10pT).

In Abschnitt 2 wird gezeigt, daß die Annahme einer linearen Übertragungsfunktion gerechtfertigt ist. Die Nichtlinearität des Skalenwertes wird durch die Feldgegenkopplung zu einer vernachlässigbaren Größe reduziert. Die durch Ringkerne hervorgerufene Nichtlinearität der Orthogonalitätsabweichung (Querfeldeinfluß) kann durch symmetrische Ringkerne und einen stabilen Anregungsstrom vermieden werden. Somit läßt sich die Übertragungsfunktion durch die drei Fehlergruppen Nullpunkte, Skalenwerte und Orthogonalitätsabweichung sowie durch die Orientierung des Sensordreibeins beschreiben.

Die Fehlergruppen enthalten jeweils drei Unbekannte. Es sind somit neun Unbekannte zu bestimmen. Hierzu sind neun Eichgleichungen notwendig.

Um die Übertragungsfunktion eines Meßsystems zu bestimmen, muß die Ausgangsgröße mit einer bekannte Eingangsgröße verglichen werden. Da eine Feldkonfiguration maximal drei Gleichungen liefern würde, ist die Variation des Magnetfeldvektors oder die Variation der Ausrichtung des Sensors zum Magnetfeld Voraussetzung für die Kalibrierung.

Sowohl die Änderung von Einzelkomponenten als auch separate Änderungen von Magnetfeldbetrag oder Richtung können zur Kalibrierung genutzt werden.

Die Quelle der Feldänderung kann künstlicher oder natürlicher Art sein. Entweder man ändert das Feld oder dessen Ausrichtung kontrolliert (zum Beispiel innerhalb eines Spulensystems), oder man mißt natürliche Feldvariationen gleichzeitig mit einem unabhängigen Meßsystem. Im ersten Fall werden definiert Feldbedingungen zu Kalibrierzwecken erzeugt. Hierzu werden Kalibriervorrichtungen genutzt, in denen das Erdfeld kompensiert (Magnetsrode, Niemegk, Jeseriger Hütten) oder abgeschirmt (Garchy) wird. Kalibrierfelder lassen sich in

Präzisionsspulen mit einer Genauigkeit von 10^{-5} erzeugen. So wurden Magnetometer für Weltraummissionen wie Cassini, Champ, Cluster, DS1, Equator-S, Oersted und Rosetta im Magnetsroder Spulensystem kalibriert.

Nutzt man die von der Natur angebotene Variation des äußeren Feldes, kann mit Hilfe einer zeitparallelen Feldregistrierung durch ein unabhängiges Referenzmagnetometer (zum Beispiel in Observatorium Niemegek oder in Jeseriger Hütten) auf die Übertragungsfunktion geschlossen werden. Tests von Magnetometern, die auf eine Parallelregistrierung von Vektormagnetometern beruhen, werden zum Beispiel im Rahmen von IAGA Workshops [Linthe 1998], [Rasson 1996] alle zwei Jahre durchgeführt. Bei Weltraummissionen im Erdorbit nutzt man die Bewegung des Satelliten im Feld der Erde aus. Die Kalibrierung wird durch einen Vergleich der Meßwerte mit dem IGRF (International Geomagnetic Reference Field) [Davenport et al. ; Lerner et al. 1979] oder durch einen Vergleich mit den skalaren Magnetfeldwerten eines Protonenmagnetometers durchgeführt. Jüngste Beispiele dafür sind die Magnetfeldexperimente auf Oersted und Champ [Merayo et al. 1999].

Eine weitere, im Weltraum anwendbare Methode basiert auf der Messung geladener Teilchen, deren Bewegung vom Magnetfeld abhängig ist. Läßt sich zum Beispiel die Bewegung von Elektronen mit Hilfe anderer Meßinstrumente bestimmen, kann man Aussagen über das Magnetfeld machen. Nimmt man im einfachsten Fall ausschließlich die Lorentzkraft als wirksam an ($\mathbf{E} = 0$), so gyrieren geladene Teilchen um die Magnetfeldlinien mit einer dem Betrag des Magnetfelds proportionalen Winkelgeschwindigkeit $\omega_g = q B m^{-1}$ [Baumjohann et al. 1997]. Bei bekannter Ladung q und bekannter Masse m kann von der Winkelgeschwindigkeit auf den Betrag des Magnetfeldes geschlossen werden. Ein Elektronen Drift Instrument (EDI) bestimmt somit über den Umweg der Gyrationperiodenmessung den Magnetfeldbetrag.

Nimmt man in einem ungestörten Feld die Gyration geladener Teilchen um die Magnetfeldlinien als vorherrschende Bewegung an, kann auf Grund der zur Magnetfeldlinie symmetrischen Verteilungsfunktion einfallender Elektronen und Ionen auf die Richtung des Magnetfeldes geschlossen werden. Die Symmetrieachse der Verteilungsfunktion einer Elektronenspektrometermessung muß somit identisch der Magnetfeldrichtung sein. Beide Methoden sind in Ansätzen bei AMPTE und Equator-S praktiziert worden. Eine detaillierte Analyse der erreichten Genauigkeit ist in Arbeiten zur Datenprimäranalyse ([Markgraf et al. 1996] und [Fornacon et al. 1999]) zu finden. Eine kontinuierliche Datenkorrektur unter Ausnutzung der Kenntnis der Elektronenbewegung bleibt zukünftigen Missionen vorbehalten.

1.3 Die Kalibrierung von Fluxgate Magnetometern mittels Relativbewegungen

Alternativ zu den aufgeführten Kalibrierverfahren kann eine Variation der Magnetfeldrichtung, die unabhängig vom Magnetfeldbetrag erfolgt, ebenfalls zur Kalibrierung genutzt werden. Ändert sich im einfachsten Fall ausschließlich die Magnetfeldrichtung, muß bei einer korrekt bestimmten Übertragungsfunktion der Betrag des Meßergebnisses konstant bleiben. So kann zum Beispiel die nichtkompressible Eigenschaft von Alfvén-Wellen im Sonnenwind zur Kalibrierung von Magnetometerdaten ausgenutzt werden [Davis et al. 1968], [Belcher 1973], [Hedgecock 1975]. Befindet sich der Sensor in einem von Scherwellen dominierten Gebiet, variiert der Einfallswinkel des magnetischen Feldes. Der Betrag jedoch bleibt konstant. Eine fehlerbehaftete Übertragungsfunktion würde diese Unabhängigkeit stören. Eine bekannte physikalische Eigenschaft des zu messenden Feldes kann somit zur Bestimmung der Übertragungsfunktion verwendet werden.

Wechselt man das Bezugssystem und bewegt den Sensor in einem homogenen Feld, erzeugt man die identischen Verhältnisse. Die Unabhängigkeit von Magnetfeldbetrag und Bewegung kann auch hier zur Kalibrierung genutzt werden. Diese Form der Kalibrierung soll in der folgenden Arbeit im Detail analysiert werden.

Da eine Bewegung relativ zum äußeren Feld sich einfach realisieren läßt oder oftmals bereits gegeben ist (Seefahrt, Raumfahrt, angewandte Geophysik), können die zeitlichen Abstände zwischen den Kalibrierungen klein gehalten werden. Weiterhin werden externe Fehlerquellen, die fest mit dem Sensor verbunden sind, ebenfalls miterfaßt. Somit verspricht diese Methode nicht nur die Erhöhung der Meßgenauigkeit, sondern auch ökonomische Vorteile. Die Bewegung kann vor Ort durchgeführt werden, so daß lange Wege zu entfernten Spulensystemen und somit Ausfallzeiten der Instrumente wegfallen. In der Weltraumfahrt würden vor und nach dem Start vergleichbare Methoden angewandt, da man im Flug oftmals auf die Relativbewegung als alleiniges Kalibrierhilfsmittel angewiesen ist.

Die Arbeit wird zeigen, daß die durch eine Bewegung des Sensors im Betrag erzeugten Symptome eindeutig auf die Fehler der Magnetfeldmessung schließen lassen. Voraussetzung dafür ist, daß Symptome verschiedener Fehler sich nicht gegenseitig kompensieren. Diese Unabhängigkeit der Symptome wird bewiesen. Somit kann man die Bewegung des Sensors zur Bestimmung der Fehler nutzen, in dem man bei Variation der Fehler numerisch auf einen konstanten (oder bekannten) Betrag fittet. Die Methode hat die Vorteile, daß sie unabhängig von Spulensystemen und zusätzlichen Meßinstrumenten ist und daß die Bewegung nicht bekannt sein muß. Einzige Voraussetzungen für die Bestimmung der Fehler ist eine ausreichende Bewegungsvielfalt und ein homogenes Feld. Anwendungen eines solchen Kalibrierverfahrens eröffnen sich bei bewegten Systemen (Fahrzeugen, Schiffen, Flugzeugen Satelliten usw.), aber auch bei stationären Magnetometern, denen ausschließlich zu Kalibrierzwecken eine Relativbewegung zum äußeren Magnetfeld aufgeprägt wird. Im ersten Fall hätte das Kalibrierverfahren den Vorteil, Fehler, die durch den Magnetometerträger erzeugt werden, mitzubestimmen.

An Hand von zwei Beispielen wird gezeigt, daß Spezialfälle der Relativbewegung Sensor-Feldvektor bereits zu Standardkalibrierverfahren zählen.

Die Nullpunktbestimmung von Fluxgate Magnetometern im reduzierten Feld soll als erstes Beispiel dienen. Im Labor schafft man sich Vorrichtungen, die eine exakte 180° Drehung des Sensors ermöglichen, im Weltraum nutzt man die Rotation des Satelliten aus. Die

Relativbewegung Sensor-Feldvektor wird auf die Rotation des Sensors beschränkt und liefert durch eine einfache Mittelwertberechnung den Nullpunkt des Sensors.

Hieraus ergeben sich sofort Fragen nach einer möglichen Verallgemeinerung:

- Ist zur Nullpunktbestimmung eine Drehung um 180° notwendig oder reicht ein beliebiger Drehwinkel ?
- Muß der Drehwinkel bekannt sein ?
- Kann man aus der Bewegung neben der Nullpunktinformation auch Aussagen über andere Fehlergruppen (Skalenwert und Orthogonalität) gewinnen ?

Als zweites Beispiel soll die Bestimmung von Skalenwert und Orthogonalität in Spulensystemen angeführt werden. Definierte Felder werden in verschiedenen Richtungen erzeugt und mit den Meßwerten des Magnetometers verglichen. Aus der Sicht des Magnetometers sind es sich um den Koordinatenursprung drehende Felder. Felder, auf einer Kugelschale angeordnet, wurden zum Beispiel für die Kalibrierung der Oersted [Nielsen et al. 1995] und Champ Magnetometer in Magnetsrode erzeugt. Dreht man den Sensor in einem konstanten Feld, würde man den gleichen Effekt erzielen (lediglich einfacher und genauer). Auch hier ergeben sich ähnliche Fragestellungen:

- Ist eine Drehung um definierte Winkel (z.B. $n \cdot 90^\circ$) notwendig oder ist die Drehung um einen beliebiger Drehwinkel ausreichend ?
- Muß die Bewegung bekannt sein ?
- Muß der Betrag des konstanten Feldes bekannt sein ?

Vorhergehende Arbeiten bestimmten einzelne Fehlergruppen wie Nullpunkte [Davenport et al.] oder Orthogonalitätsabweichung [Harborth 1991] mit Hilfe der Sensor Bewegung. Die folgende Analyse zeigt, daß alle Koeffizienten der Übertragungsfunktion gleichzeitig durch die Bewegung des Sensors bestimmt werden können.

Es wird sich ebenfalls zeigen, daß skalaren Kalibriermethoden nicht nur auf sich ändernden bekannten Feldbeträge basieren können [Lerner et al. 1979], [Merayo et al. 1999], sondern schon bei konstanten Feldbedingungen eindeutige Lösungen liefern. Es wird bewiesen, daß allein die Bewegung des Sensors relativ zum Magnetfeld zur Kalibrierung ausreichend ist. Die konkrete Kenntnis der Bewegung ist nicht notwendig.

2 Funktionsweise und Fehlerquellen von Fluxgate Magnetometern

Meßfehler bei Fluxgate Magnetometern können sowohl durch den Sensor als auch durch die Elektronik verursacht werden. Der Einfluß der Auswertelektronik soll hier aber vernachlässigt werden, da ihr Anteil am Gesamtfehler mit der technologischen Weiterentwicklung elektronischer Bauelemente an Bedeutung verloren hat. Vorverstärker haben einen hohen Dynamikbereich, phasenempfindliche Gleichrichter sind schnell und somit symmetrisch geworden, DC-Verstärker sind ausreichend offsetstabil und das gegenseitige Übersprechen von Analogkanälen ist technologisch vermeidbar. Mit der Einführung des Digitalmagnetometers [Auster et al. 1995] wird die Mehrzahl der durch die Elektronik verursachten Fehler prinzipiell vermieden. Aus diesem Grund werden die Fehlerquellen im Folgenden ausschließlich der Anregung und dem Sensor zugeordnet. Hierzu wird ein Modell vorgestellt, das die Möglichkeit der Einführung von Anregungs- und Sensorfehlern zuläßt.

2.1 Modellierung des Entstehungsprozesses der feldproportionalen zweiten Harmonischen unter Berücksichtigung der Sensor- und Anregungsfehler

2.1.1 Das Sensormodell

Das Standardmodell zum Entstehungsmechanismus der feldabhängigen zweiten Harmonischen der Anregungsfrequenz basiert auf der mathematischen Analyse des in beiden Kreissegmenten induzierten Summensignals. Im Gegensatz dazu sollen hier die Signale in beiden Segmenten unabhängig voneinander mit Fehlern beaufschlagt und anschließend summiert werden. So bleibt die Möglichkeit erhalten, die Asymmetrie des Ringkernes zu betrachten.

Der Sensor, schematisch in Abbildung 2-1 dargestellt, besteht aus dem magnetischen Kern, der Anregungswicklung, der Sekundärwicklung und der Gegenkopplungswicklung.

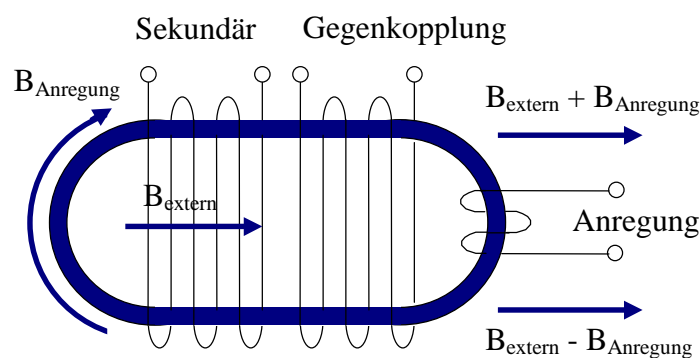


Abbildung 2-1: Kern mit Wicklungen

Üblich ist sowohl die Anwendung offener magnetischer Kreise (Doppelstabkerne) als auch die Anwendung geschlossener magnetischer Kreise (Ringkern, Racetrack).

In beiden Fällen gilt nach dem Faradayschen Induktionsgesetz allgemein:

$$U = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d(nA\mu_0\mu_r(t)H(t))}{dt}$$

Bei gegebener Geometrie und quasi konstantem äußerem Feld ist die zeitliche Änderung der relativen Permeabilität für die Entstehung der Ausgangsspannung zuständig.

$$U = \frac{d\Phi}{dt} = n A \mu H \frac{d(\mu_r(t))}{dt}$$

Das weichmagnetische Material wird bei Fluxgate Magnetometern durch das vom Anregungsstrom erzeugte Wechselfeld alternierend in die positive und negative Sättigung getrieben (daher auch Saturationskern - Magnetometer genannt). Das einfachste Modell geht von einer dreieckförmigen Anregung und einer verlustfreien Hysterese aus. Bei jeder durch das Wechselfeld der Anregung erzeugten linearen Flußänderung wird ein Rechtecksignal in der Sekundärwicklung induziert.

Die unterbrochenen Linien in Abbildung 2-2 zeigen Feld, magnetischen Fluß und Ausgangsspannung in den gegenüberliegenden Kernsegmenten eines Ringkernes.

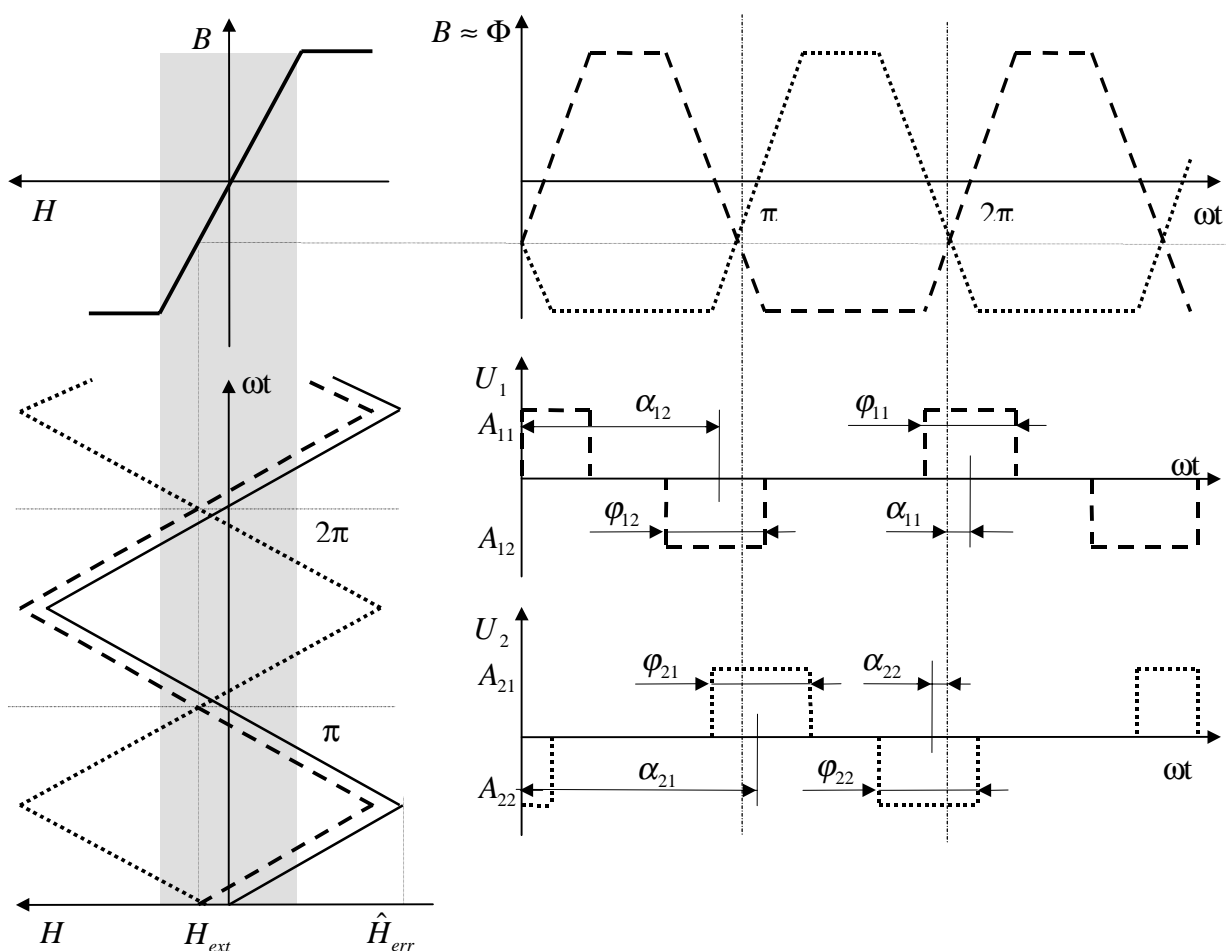


Abbildung 2-2: Entstehungsmechanismus der zweiten Harmonischen.
 - - - - - erstes Kernsegment
 zweites Kernsegment

Dieses Modell wird in vielen grundlegenden Arbeiten zu Fluxgate Magnetometern ([Feldtkeller 1943], [Fanslau 1960], [Primdahl 1970], [Flügge 1971], [Gordon et al. 1972], [Primdahl 1979]) diskutiert und erweitert. In allen Arbeiten werden die in den jeweils

gegenüberliegenden Kernsegmenten induzierten Impulsfolgen zuerst addiert und anschließend als Fourierreihe dargestellt. In dieser Arbeit wird jede induzierte Impulsfolge separat als Fourierreihe dargestellt, um sich so die Möglichkeit der Betrachtung der Asymmetrie des Sensors zu erhalten. Zwei Impulsfolgen beschreiben die durch ein Segment induzierte Spannung. Die Gesamtspannung entspricht der Summe aller vier Impulsfolgen (siehe Abb. 2-2).

Die Impulse können als periodische Rechteckfolgen zweiter Art [Bartsch 1962] mit der Amplitude A , der halben Impulsbreite φ und der Phasenverschiebung α beschrieben werden. Für die durch die Segmente erzeugten Teilspannungen gilt:

$$f_1(\omega t) = \frac{2A_{11}}{\pi} \left\{ \frac{\varphi_{11}}{2} + \frac{\sin(\varphi_{11})}{1} \cos(\omega t + \alpha_{11}) + \frac{\sin(2\varphi_{11})}{2} \cos(2\omega t + 2\alpha_{11}) + \frac{\sin(3\varphi_{11})}{3} \cos(3\omega t + 3\alpha_{11}) + \dots \right\}$$

$$+ \frac{2A_{12}}{\pi} \left\{ \frac{\varphi_{12}}{2} + \frac{\sin(\varphi_{12})}{1} \cos(\omega t + \alpha_{12}) + \frac{\sin(2\varphi_{12})}{2} \cos(2\omega t + 2\alpha_{12}) + \frac{\sin(3\varphi_{12})}{3} \cos(3\omega t + 3\alpha_{12}) + \dots \right\}$$

$$f_2(\omega t) = \frac{2A_{21}}{\pi} \left\{ \frac{\varphi_{21}}{2} + \frac{\sin(\varphi_{21})}{1} \cos(\omega t + \alpha_{21}) + \frac{\sin(2\varphi_{21})}{2} \cos(2\omega t + 2\alpha_{21}) + \frac{\sin(3\varphi_{21})}{3} \cos(3\omega t + 3\alpha_{21}) + \dots \right\}$$

$$+ \frac{2A_{22}}{\pi} \left\{ \frac{\varphi_{22}}{2} + \frac{\sin(\varphi_{22})}{1} \cos(\omega t + \alpha_{22}) + \frac{\sin(2\varphi_{22})}{2} \cos(2\omega t + 2\alpha_{22}) + \frac{\sin(3\varphi_{22})}{3} \cos(3\omega t + 3\alpha_{22}) + \dots \right\}$$

Die Koeffizienten berechnen sich wie folgt:

$$A_{i1} = \frac{B_{Sat}}{H_{Sat}} \frac{2\hat{H}_{Err}}{\pi}, A_{i2} = -\frac{B_{Sat}}{H_{Sat}} \frac{2\hat{H}_{Err}}{\pi} ; \text{Permeabilität} * \text{Steigung der Anregung} (nT/s)$$

$$\varphi_{ij} = \frac{\pi}{2\hat{H}_{Err}} H_{Sat} ; \frac{\text{Sättigungsfeldstärke}}{\text{Steigung der Anregung}} (s)$$

$$\alpha_{11} = \frac{\pi}{2\hat{H}_{Err}} H_{Ext}, \alpha_{12} = \pi - \frac{\pi}{2\hat{H}_{Err}} H_{Ext} ; \frac{\text{externe Feldstärke}}{\text{Steigung der Anregung}} (s)$$

$$\alpha_{21} = \pi + \frac{\pi}{2\hat{H}_{Err}} H_{Ext}, \alpha_{22} = -\frac{\pi}{2\hat{H}_{Err}} H_{Ext}$$

In der Literatur werden die Parameter Entmagnetisierungsfaktor, Anregungsform und Hysterese des weichmagnetischen Materials ausführlich behandelt.

Der Entmagnetisierungsfaktor stellt den prinzipiellen Unterschied zwischen den Anregungen offener und geschlossener magnetischen Kreise dar. Gordon vergleicht die Berechnungen von Entmagnetisierungsfaktoren von Ringkernen [Marshall 1967] und Stabkernen [Primdahl 1970].

Bei der hier zu diskutierenden Fehleranalyse jedoch soll der Entmagnetisierungsfaktor wie auch andere Sensorparameter (zum Beispiel die chemische Zusammensetzung und Wärmebehandlung des weichmagnetischen Materials sowie die Homogenität und Stabilität der Spulen) als gegeben betrachtet werden. Sie beeinflussen die Empfindlichkeit, können aber keineswegs Fehlergrößen wie den Nullrest der Sekundärspannung, den Magnetometer Offset oder die Abweichung von der Orthogonalität erklären. Die Ursache dieser Fehler liegt in der Asymmetrie von Sensor und Anregung. Da die Bestimmung der Fehlergrößen Gegenstand dieser Arbeit ist, muß das Modell Asymmetrien zulassen. Mit der separaten Behandlung der Kernsegmente ist das im Unterschied zu den erwähnten Literaturbeispielen gegeben.

2.1.2 Das Anregungsmodell

Zu prüfen ist, ob das einfache Modell einer dreieckförmigen Anregung nutzbar ist, um Fehler in Fluxgate Magnetometern zu erklären. Schaut man sich den Anregungsstrom der Magnetometer vieler Satellitenmissionen an, so ist keine Verwandtschaft mit einem Dreieck zu erkennen. Hierfür sind primär zwei Umstände verantwortlich. Bei Anregungsspulen mit weichmagnetischem Kern handelt es sich um einen extrem nichtlinearen komplexen Widerstand. Im Nullbereich wird der Widerstand von der hohen Induktivität dominiert, im ausgesteuerten Zustand besitzt die Spule lediglich den ohmschen Widerstand der Drahtwicklung. Zum Zweiten sind die Hersteller von Sensoren bemüht, das magnetische Material oberhalb der Sättigungsfeldstärke schnell und tief in die Sättigung zu fahren, um auch schwerfällige Weißsche Bezirke in die richtige Richtung auszurichten.

Eine Lösung, die beide Umstände berücksichtigt, wurde 1974 [Acuna 1974] vorgestellt.

Gebremst durch eine Spule und gleichspannungsmäßig entkoppelt wird eine über die Anregungswicklung geschaltete Parallelkapazität aufgeladen (siehe Abb. 2-3).

Wenn die Induktivität bei Erreichen der Sättigungsfeldstärke zusammenbricht, entlädt sich der Kondensator über den Ringkern. Der dann fließende Strom erzeugt Felder, die ein Vielfaches der Sättigungsfeldstärke betragen. Die Abbildungen 2-4 und 2-5 zeigen die typische Kurvenform des Anregungsstromes (original und 100fach verstärkt).

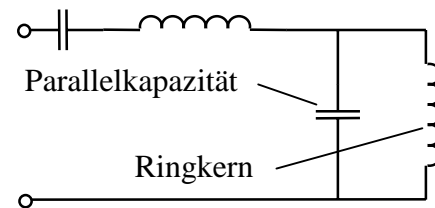


Abbildung 2-3: Anregung

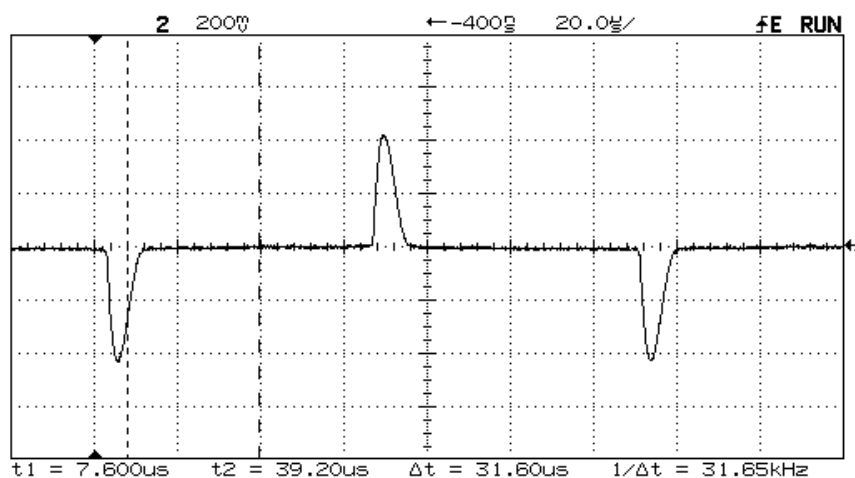


Abbildung 2-4: Anregungsstrom mit Stromspitzen von 1A

Der eigentliche Entstehungsprozeß der feldproportionalen Oberwelle der Anregungsfrequenz findet nur in den in Abbildung 2-5 markierten Intervallen statt. Die hohen Stromspitzen verbessern die Rauscheigenschaften, liefern aber keinen Anteil am feldproportionalen Ausgangssignal, da sie Felder jenseits der Sättigungsfeldstärke erzeugen. Der Entstehungsprozeß der zweiten Harmonischen ist zweigeteilt. Die Steigung beim Eintritt in die Hysterese (in Abb. 2-5 gestrichelt markiert) ist geringer als beim Austritt (gepunktet markiert). Zwischen beiden Bereichen befinden sich die Ringkernsegmente im linearen Bereich der $B(H)$ Kennlinie. In beiden Übergangsbereichen sind die Widerstandsverhältnisse identisch, jedoch die angelegte Spannung unterschiedlich. Da die Polarität des

Anregungstaktes nach Eintritt in die Sättigung umgeschaltet wird, ist die sich über einen Kondensator aufbauende Spannung bei Austritt aus der Sättigung klein und erreicht bei Eintritt in die Sättigung ihr Maximum.

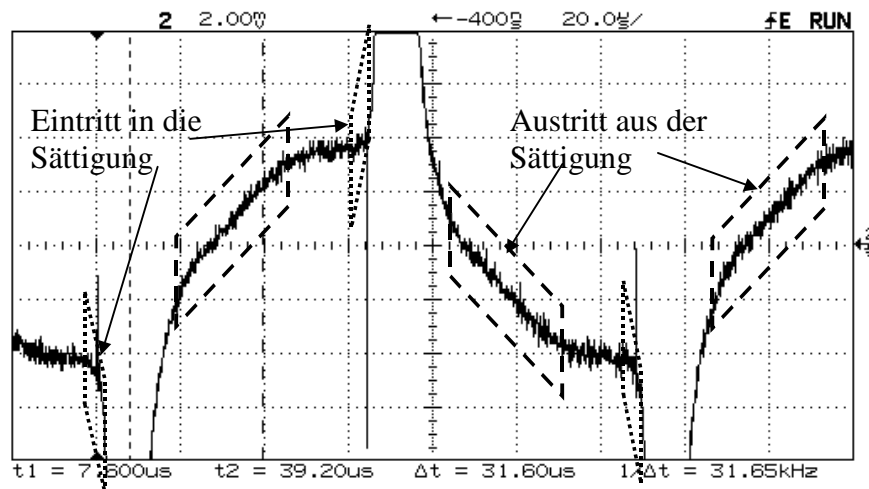


Abbildung 2-5: Anregungsstrom einhundertfach verstärkt

In Konsequenz würde das für das Anregungsmodell die Annahme einer unterschiedlichen Steigung bei Ein- und Austritt aus dem gesättigten Zustand bedeuten. Da aber die aus den aktiven Regionen der Anregung resultierenden Impulsfolgen separat betrachtet werden können (der Wegfall einer Impulsfolge hätte keinen Einfluß auf die spektrale Zusammensetzung des Signals), soll bei der folgenden Fehlerbetrachtung aus Gründen der Übersichtlichkeit von einer kontinuierlichen Steigung ausgegangen werden.

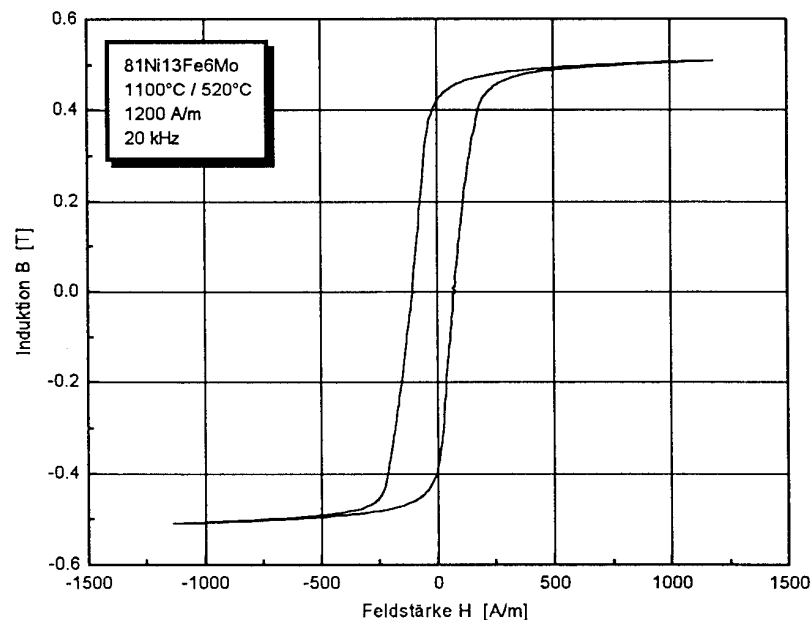


Abbildung 2-6: Hysterese der für Ringkerne verwendeten NiMo Legierung

Weiterhin ist zu beobachten, daß der Strom im Gegensatz zum Modell in Abb. 2-2 ungehindert bis auf Null fallen kann, ohne daß sich ein induktiver Widerstand aufbaut. So sind die aktiven Regionen nicht mehr symmetrisch zur Zeitachse angeordnet. Der Austritt aus

dem gesättigten Zustand erfolgt sehr viel später als der Eintritt in den gesättigten Zustand. Grund dafür ist die Hysterese des eingesetzten weichmagnetischen Materials.

Die Koerzitivfeldstärke (Nulldurchgang der Hysterese) des von K.H. Fornacon entwickelten und in einer Vielzahl von geomagnetischen Instrumenten und Weltraumexperimenten eingesetzten Materials liegt in der gleichen Größenordnung wie die Sättigungsfeldstärke einer hysteresefreien $B(H)$ Kennlinie (siehe Abb. 2-6).

Um diese Eigenschaft in das Modell zu übernehmen, wird die dreieckförmige Anregung an einer idealisierten Hysterese gespiegelt. Knickpunkte für den auf- und absteigenden Ast sind jeweils die Nulldurchgänge. Abbildung 2-7 zeigt das Ergebnis.

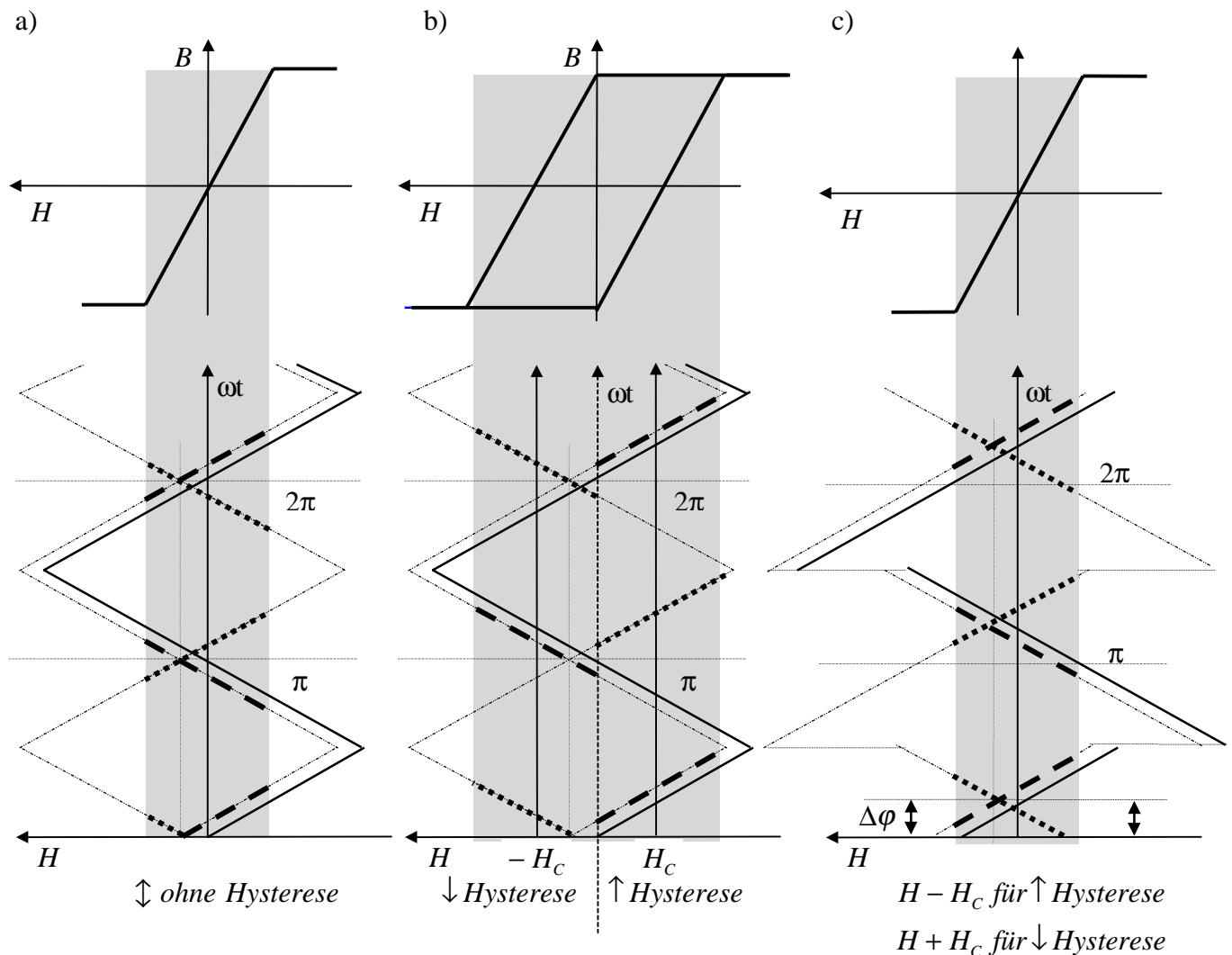


Abbildung 2-7 a-c: Einfluß der Hysterese auf die Phasenverschiebung von Ausgangssignal zu Anregungsstrom

Im Vergleich zu der hysteresefreien (Abb 2-7 a) $B(H)$ Kurve verschieben sich die aktiven Feldbereiche bei Einführung einer Hysterese analog der gemessenen Kurve nach außen (Abb. 2-7 b). Da nur die aktiven Bereiche (mit grauer Farbe hervorgehoben) für die Entstehung der feldproportionalen Harmonischen der Anregungsfrequenz zuständig sind, und da bei der Spiegelung der Zeitfunktion an der Hysterese sich die Feldstärke herauskürzt ($H/t \times B/H = B/t$), ist eine Verschiebung der $H(t)$ Kurve in H -Richtung unter Vernachlässigung der ausgesteuerten Bereiche legitim. Die in Abb. 2-7c um $\pm H_c$ verschobenen Signale liefern für die aktiven Bereiche das zum Eingangsmodell (Abb. 2-7a)

um $\Delta\varphi$ phasengeschobene Signal. Die Hysterese verursacht somit eine Phasenverschiebung, läßt aber die Amplitude des Ausgangssignals unberührt. Die Phasenverschiebung berechnet sich aus der Anstiegszeit des Anregungsfeldes im aktiven Bereich (zwischen $-B_{Sat}$ und B_{Sat}), der Sättigungsfeldstärke und der Koerzitivfeldstärke wie folgt:

$$\Delta\varphi = H_C \frac{\omega t_{Anstieg}}{2H_{Sat}}$$

Für die Dreiecksanregung gilt: $\omega t_{Anstieg} = \pi \frac{H_{Sat}}{\hat{H}_{Err}} \Rightarrow \Delta\varphi = \pi \frac{H_C}{2H_{Err}}$

Für die EQS Anregung gilt: $H_C \approx H_{Sat} \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{1}{2} \omega t_{Anstieg}$

Die Anstiegszeit $t_{Anstieg}$ kann theoretisch zwischen 0 und π liegen, somit $\Delta\varphi$ zwischen 0 und $\pi/2$. Nimmt man eine zur Anregungsfrequenz in Phase liegende zweite Harmonische als Referenz ist eine Phasenschiebung zwischen 0 und π in Abhängigkeit der aktiven Anstiegszeit der Anregung theoretisch möglich. So ist die Phasenverschiebung der zweiten Harmonischen zum Anregungssignal keineswegs vernachlässigbar. Alleinige Ursache ist die Hysterese des weichmagnetischen Materials. Für die Größe der Phasenverschiebung ist aber die Art der Anregung maßgeblich.

In der Literatur wird der Einfluß der Hysterese nur in wenigen Arbeiten beschrieben. Meist wird die zweiten Harmonische phasensynchron zur Anregung angenommen.

Schmidt und Wiese [Fanslau 1960] fassen die Literatur zu Fluxgate Magnetometern bis 1960 zusammen. Sie verweisen auf die Arbeit von Wurm [Wurm 1950], in der die durch die Hysterese verursachte Phasenverschiebung wie folgt berücksichtigt wird:

$$U_{2f} = \frac{4}{\pi} w \omega F B_s \frac{2H_0}{\hat{H}_{Err}} \sin\left(2\omega t - \frac{V}{2\hat{H}_{Err} B_s}\right)$$

V steht für die von der Hysterese eingeschlossene Fläche. Setzt man auch hier die Koerzitivfeldstärke gleich der Sättigungsfeldstärke, beträgt die eingeschlossene Fläche $4B_s H_C$. Die auf die zweite Harmonische bezogene Phasenverschiebung beträgt $2H_C/H_{Err}$. Auf die Anregungsfrequenz bezogen ist die zweite Harmonische um H_C/H_{Err} verschoben. Vergleicht man die von Wurm ermittelte Abhängigkeit von Phasenverschiebung und Hysterese mit dem obigen Modell, so kommt man zu nahezu identischen Resultaten. Der Faktor $\pi/2$ zwischen beiden Ergebnissen liegt in den unterschiedlichen Modellannahmen begründet. So benutzt Wurm zum Beispiel keinen speziellen Anregungsverlauf, sondern schreibt nur Symmetriebedingungen vor und schränkt die Berechnungen auf geringe Hystereseverluste ein.

In späteren Arbeiten ist es ausschließlich Primdahl, der die Hysterese mit in die Berechnung einbezieht. 1970 erwähnt er den Einfluß der Hysterese auf Amplitude (?) und Phase, ohne ihn näher zu beschreiben. 1979 berechnet er die Abhängigkeit, in dem er die relative Permeabilität über der Zeit plottet. Mit der Einführung einer Hysterese verschiebt er die Permeabilitätskurve entlang der ωt Achse.

Laut Primdahl berechnet sich die Phasenverschiebung wie folgt: $\Delta\varphi = \sin^{-1} \frac{H_1}{\hat{H}_{Err}}$

H_1 ist die Feldstärke, bei der sich die Hysterese verzweigt. Im Modell der einfachen Hysterese ist es die Summe aus Sättigungs- und Koerzitivfeldstärke.

Setzt man auch hier die Koerzitivfeldstärke gleich der Sättigungsfeldstärke, bekommt man mit $\arcsin 2H_C/H_{Err}$ einen dritten Wert für die Phasenverschiebung, aber auch dieser Wert besitzt die gleichen Abhängigkeiten.

Der Bereich der Anregungskurve, in dem das Material gesättigt ist, wurde in der Literatur für die Betrachtung des Übertragungsverhalten vollkommen ausgeklammert.

Allen Literaturangaben zu Folge müßte das Sekundärsignal eine dem äußeren Feld proportionale zweite Harmonische beinhalten und frei von Grundwelle sein. Die Sekundärspannung müßte demnach vernachlässigbar sein, wenn sich der Sensor im Nullfeld befindet. In Praxis aber wird die Sekundärspannung im Nullfeld (Nullrest) von der Grundwelle dominiert und besitzt einen kleinen Anteil an zweiter Harmonischen, der gleichgerichtet den Offset des Sensors darstellt. Ein erheblicher Anteil dieses Nullrestes wird durch das Übertragungsverhalten des Sensors im angesteuerten Bereich erzeugt.

Dem Induktionsgesetz folgend ist die Sekundärspule über die Luft mit der Anregungsspule gekoppelt. Das Übertragungsverhalten ist unabhängig vom äußerem Feld, da die relative Permeabilität $\mu_{rel} = 1$ unabhängig vom äußeren Feld ist. Die in die Sekundärwicklung transformierten Frequenzanteile des Anregungsfeldes kompensieren sich bei einem symmetrischen Sensor.

Bei einem Einzelkern als Extremfall für einen asymmetrischen Sensor verhält sich der Sensor wie ein Transformator. Alle im Anregungsstrom auftretenden Harmonischen werden mit einer Phasenverschiebung von 90° in die Sekundärwicklung eingekoppelt.

Obwohl die relative Permeabilität des „Kernmaterials“ auf Grund der Sättigung des weichmagnetischen Materials bei 1 liegt, ist der Kopplungsprozeß nicht zu vernachlässigen. Die hohen Stromspitzen (1A im Vergleich zu maximal 10mA Sättigungsstrom) und die nur endlich symmetrische Anregungswicklung bewirken eine größere sekundärseitige Signalamplitude als der eigentliche Entstehungsprozeß des Fluxgate Signals. Im Gegensatz zu allen anderen Übertragungsmechanismen ist für die Transformation von Frequenzanteilen des Anregungsstromes in die Sekundärwicklung nicht die Symmetrie des Kernmaterials hinsichtlich der Sekundärspule verantwortlich, sondern ausschließlich die Symmetrie der Anregungswicklung hinsichtlich der Sekundärspule. Nicht nur der Kopplungsmechanismus, sondern auch die Symmetriebedingungen unterscheiden sich von den analysierten Prozessen. Enthält die Anregung Anteile geradzahliger Harmonischer auf Grund eines asymmetrischen Anregungsstroms, so werden diese Anteile mit einer Phasenverschiebung von 90° transformiert. Da eine gerade Funktion (Anregung) mit Sinusreihen beschrieben wird, werden Kosinusanteile in der Sekundärwicklung induziert. Somit liefert die Übertragung im angesteuerten Bereich als einziger Mechanismus eine Erklärung für die Erzeugung einer zur feldabhängigen zweiten Harmonischen phasenverschobenen zweiten Harmonischen. Für die erzeugten Frequenzanteile gilt:

$$\begin{aligned} f^{(1)}(\omega t) &= k A_{f_0} \cos(\omega t) \\ f^{(2)}(2\omega t) &= k A_{f_{20}} \cos(2\omega t) \end{aligned}$$

An dieser Stelle soll auf zwei Effekte hingewiesen werden, auf deren Bedeutung in der weiteren Arbeit zurückgekommen wird.

- Eine gleichmäßige Bewicklung des Ringkerns ist im ungesättigten Bereich ohne Bedeutung, da der magnetische Fluß im Kern gebündelt wird. Im angesteuerten Bereich ist jedoch die Symmetrie von Anregungsspule zu Sekundärspule entscheidend für das Übertragungsverhalten, da das weichmagnetische Material bedeutungslos geworden ist.

(siehe Übertragungsverhalten im ausgesteuerten Bereich für den unsymmetrischer Sensor in Abschnitt 2.3).

- Der Durchbruchzeitpunkt des Anregungsstroms verändert sich mit zunehmendem äußeren Feld. Der Durchbruch erfolgt, wenn beide Ringkernsegmente die Sättigungsfeldstärke erreicht haben. Der Durchbruchzeitpunkt liegt bei zunehmendem externen Feld früher als im Nullfeld. Auf Grund der verkürzten Aufladezeit des Parallelkondensators nimmt die Amplitude der Anregungsspitzen bei zunehmendem äußeren Feld ab. Die Rückwirkung externer Felder auf die Anregung wird im Rahmen der Quersfeldabhängigkeit (siehe Abschnitt 2.5.2) ausführlich analysiert.

Somit gilt für das vorgestellte Modell:

- Es ist an die reale Anregungskurve anpaßbar.
- Es ermöglicht die Berücksichtigung einer Hysterese.
- Es beschreibt den Entstehungsmechanismus der feldabhängigen zweiten Harmonischen.
- Es läßt die Asymmetrie von Anregung und Sensor zu.
- Es erklärt den erheblichen Anteil an Grundwelle im Nullrest.

2.1.3 Vergleich Modell - Praxis

Mit Hilfe eines sehr einfachen Versuchsaufbaus, der sich aber als fundamental zur Trennung von Fehlereinflüssen erwiesen hat, kann der Einfluß der Asymmetrie der Anregungswicklung und der Einfluß der Asymmetrie des weichmagnetischen Materials separat nachgewiesen werden. Ein Ringkern mit weichmagnetischem Material wird zu einem geometrisch identischen Kern ohne Material (eisenloser Kern) in Reihe geschaltet. Durch die wechselweise Positionierung von eisenlosem und weichmagnetischem Kern innerhalb der Sekundärspule kann ohne Änderung der Anregungsparameter das jeweilige Übertragungsverhalten analysiert werden. Weiterhin ist es möglich, den lokal von der Sekundärspule entfernten Ringkern unterschiedlichen Feldern auszusetzen, so daß eine Rückwirkung des Feldes auf den Anregungsstrom untersucht werden kann.

Abbildung 2-8 skizziert den Versuchsaufbau:

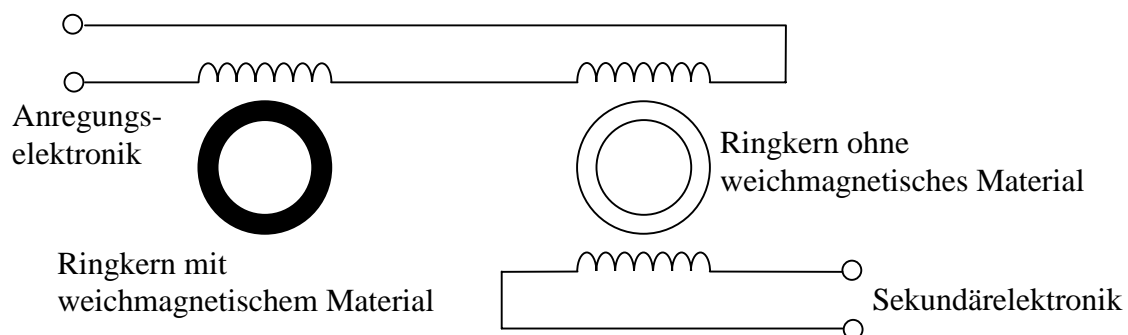


Abbildung 2-8: Versuchsaufbau zur Bestimmung der Quellen der zweiten Harmonischen im Sekundärsignal.

Befindet sich der eisenlose Kern in der Sekundärspule und liegen beide Kerne im Nullfeld, ergibt sich das Oszillogramm in Abbildung 2-9.

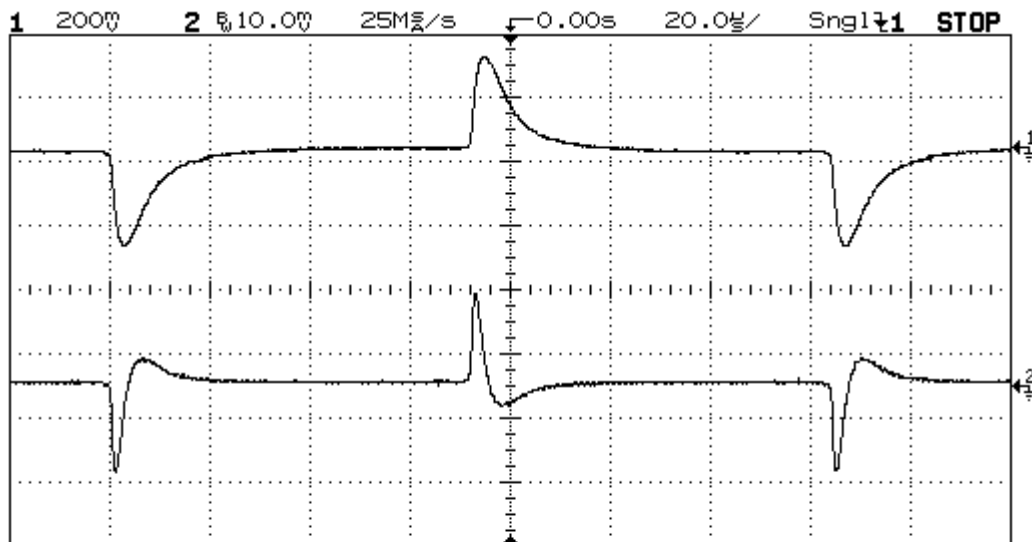


Abbildung 2-9: Anregungsstrom (oben) und sekundär induzierte Spannung (unten), die durch einen eisenlosen Ringkern induziert wurde.

Ursache für die Transformation des Anregungssignals ist die Asymmetrie der Anregungswicklung. Das induzierte Sekundärsignal ist proportional dem differenzierten Anregungsstrom. Die Ausgangsspannung enthält die gleichen Frequenzanteile wie das Anregungssignal. Die Phase jedoch ist um 90° verschoben. Die induzierte Spannung ist ein unliebsamer Störfaktor und trägt nicht zur Gewinnung einer feldabhängigen Spannung bei.

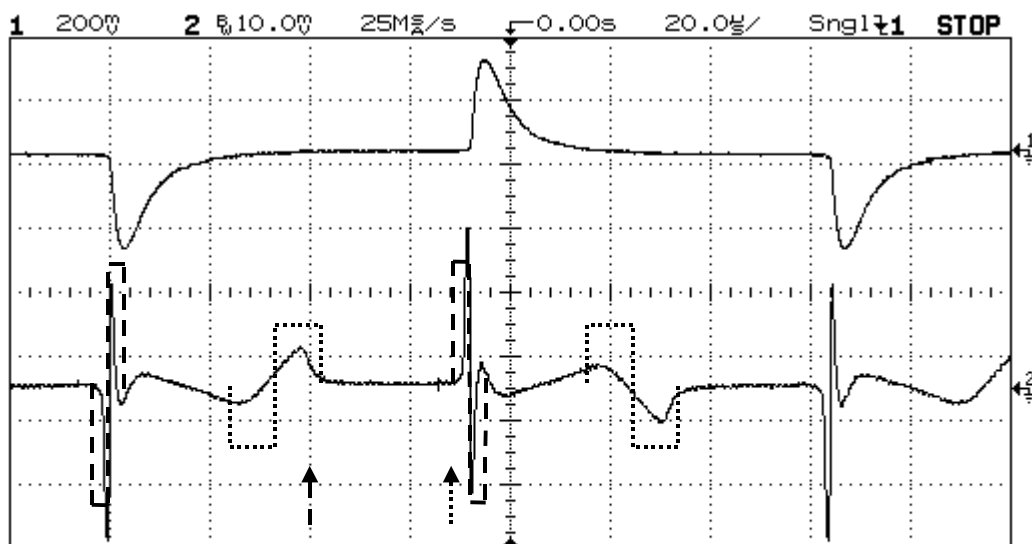


Abbildung 2-10: Anregungsstrom (oben) und sekundär induzierte Spannung (unten), die durch einen Ringkern im Nullfeld induziert wurde.

Vertauscht man beide Ringkerne in Abbildung 2-8, so daß sich der weichmagnetische Kern in der Sekundärspule befindet, erhält man die in Abbildung 2-10 dargestellte Sekundärspannung. Auch hier sieht man den durch die Asymmetrie der Anregungswicklung erzeugten Nullrest. Der aber wird überlagert durch den von der Asymmetrie des weichmagnetischen Kerns verursachten Nullrest. Subtrahiert man den von der

Anregungswicklung erzeugten Anteil von der Kurve, bleibt der schematisch mit Rechtecken markierte Anteil für den durch das weichmagnetische Material erzeugten Anteil übrig. Die durch den weichmagnetischen Kern induzierten Rechtecke treten beim Ein- und Austritt in bzw. aus der Hysterese auf. Die Amplituden sind proportional der Steigung des Anregungsstromes. Die jeweils gestrichelten und gepunkteten Rechtecke bilden Grundwellenanteile, deren Nulldurchgänge beim Hystereseeintritt (gestrichelt) bzw. beim Hystereseaustritt (gepunktet) liegen. Die jeweiligen positiven Maxima sind mit Pfeilen gekennzeichnet. Das resultierende Maximum liegt ca. 80° vor dem Stromanstieg.

Setzt man den Sensor einem Feld von 10.000nT aus, erhält man die in Abbildung 2-11 dargestellte Sekundärspannung.

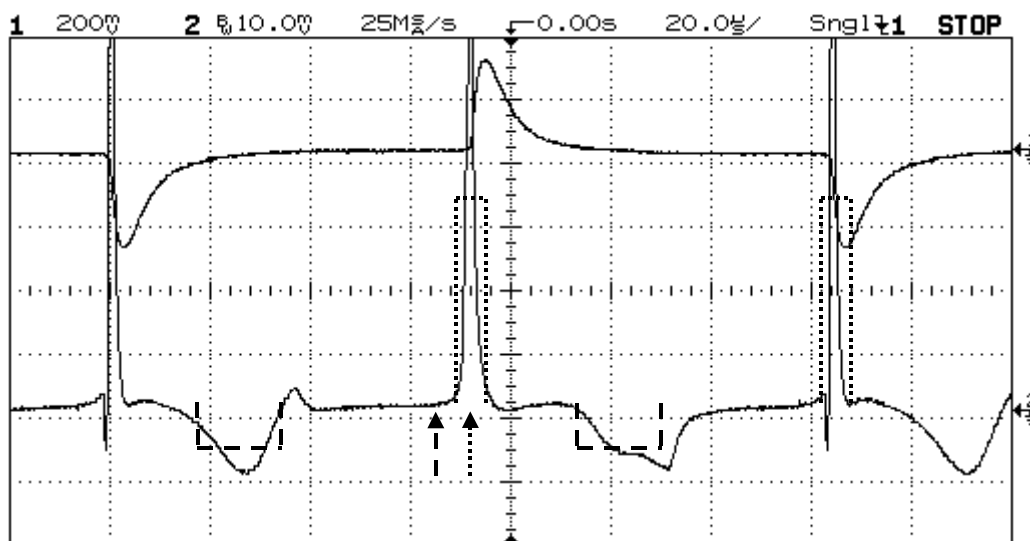


Abbildung 2-11: Anregungsstrom (oben) und sekundär induzierte Spannung (unten), die durch einen Ringkern im 10.000nT Feld induziert wurde.

Im Vergleich zu Abbildung 2-10 prägt sich die feldabhängige zweite Harmonische durch. Subtrahiert man sowohl den von der Anregungswicklung als auch den vom weichmagnetischen Kern erzeugten Anteil, bleibt der schematisch mit Rechtecken markierte Anteil für die zweite Harmonische übrig. Wendet man das Modell zur Entstehung der zweiten Harmonischen auf die in Abbildung 2-7 dargestellte Anregung an, werden exakt die markierten Rechtecke generiert. Die gestrichelten Rechtecke resultieren aus der Differenz der Spannungen U_1 und U_2 bei Eintritt in die Hysterese. Die Amplitude ist auf Grund der sanften Steigung der Anregung gering, die Dauer jedoch lang. Die gepunkteten Rechtecke resultieren aus der Differenz der Spannungen U_1 und U_2 bei Austritt aus der Hysterese. Die Amplitude ist hoch, die Dauer jedoch kurz. Das positive Maximum der zweiten Harmonischen der gepunkteten Rechtecke (gepunkteter Pfeil) liegt beim Austritt aus der Hysterese (Stromanstieg). Das der gestrichelten Rechtecke (gestrichelter Pfeil) liegt kurz vor dem Stromanstieg. Somit liegt auch das resultierende Maximum kurz vor dem Stromanstieg.

In Abbildung 2-12 werden sowohl die modellierten Grundwellenanteile als auch die zweite Harmonische im Anregungssignal und im Sekundärsignal graphisch dargestellt. In der oberen Grafik sind die Frequenzanteile des Anregungsstromes eingezeichnet. Auf Grund der in Abschnitt 2.1.1. gewählten Fourierzerlegung liegen beide Anteile in Phase. Die Balken symbolisieren die Stromimpulse.

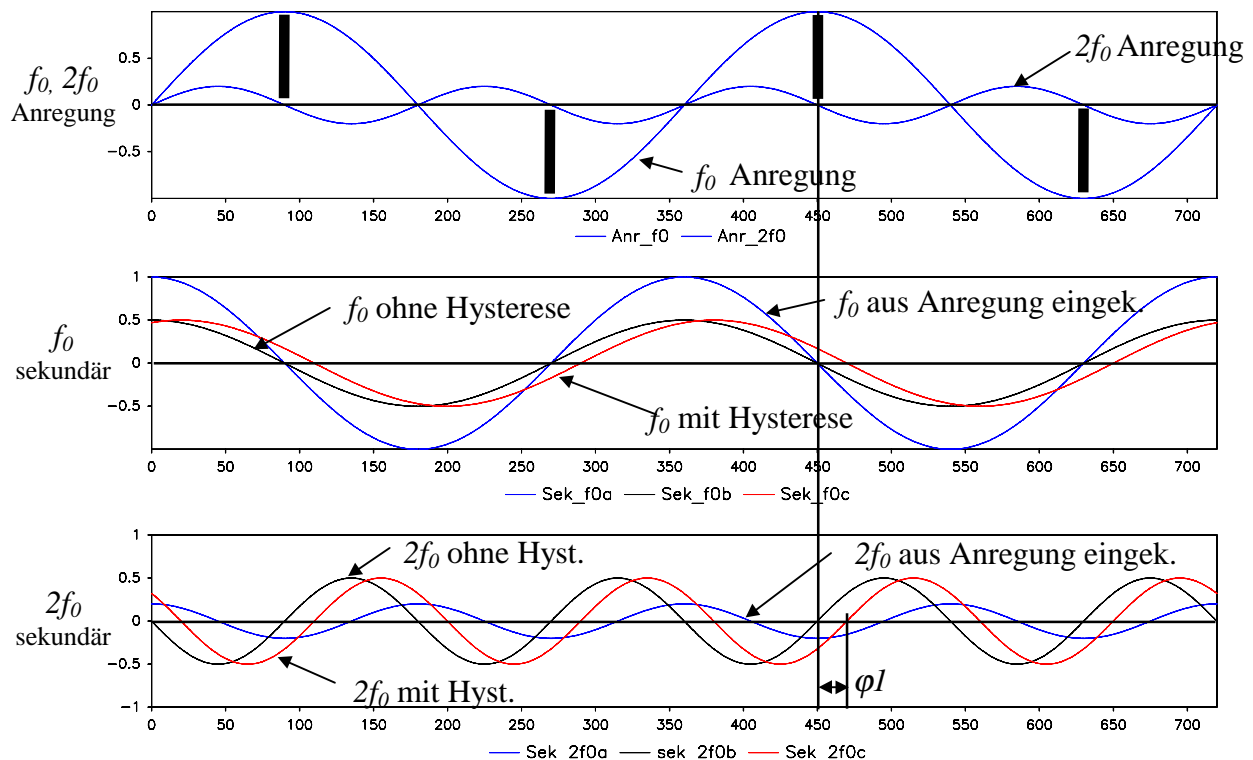


Abbildung 2-12: Phasenlage von Grundwelle und zweiter Harmonischen im Anregungsstrom und in der Sekundärspannung.

Im Sekundärsignal sind die durch die Asymmetrie des Sensors eingekoppelten Frequenzanteile um 90° zu den Frequenzanteilen im Anregungsstrom verschoben. In der mittleren Grafik ist die Grundwelle, in der unteren Grafik die zweite Harmonische dargestellt. Die feldabhängigen Anteile der zweiten Harmonischen (laut Abschnitt 2.1.1. in Phase mit der Grundwelle der Anregung) liegen somit um 90° verschoben zu der eingekoppelten zweiten Harmonischen der Anregung. Ein Phasenabgleich auf die feldabhängige zweite Harmonische würde automatisch eine Unterdrückung der eingekoppelten Oberwelle bedeuten. Berücksichtigt man die Hysterese des weichmagnetischen Materials, werden die über den Fluxgate Mechanismus generierten Frequenzanteile um die Phase φ_l verschoben. Meßsignal und eingekoppelte Oberwelle lassen sich demnach durch einen Phasenabgleich nicht mehr separieren.

Vergleicht man die Phasenlage der durch die Hysterese verschobenen zweiten Harmonischen mit den Meßergebnissen in Abbildung 2-10 und 2-11, sieht man die Übereinstimmung zwischen Modell und Praxis. Das resultierende Maximum der gemessenen zweiten Harmonischen liegt wie auch die modellierte Harmonische wenige Grad vor dem Stromimpuls der Anregung. Für beide Einkopplungsmechanismen stimmen die berechneten und gemessenen Phasenlagen der Frequenzanteile überein.

⇒ Im Gegensatz zu den bisher veröffentlichten Berechnungen des Ausgangssignals eines Fluxgate Magnetometers beschreibt das hier behandelte Modell nicht nur den Entstehungsmechanismus der feldabhängigen zweiten Harmonischen, sondern kann den realen Nullrest, die Wirkung von Fehlereinflüssen und, wie sich in Abschnitt 2.5 zeigen wird, auch Querfeldeffekte erklären. Mit dem vorgestellten Meßaufbau können überzeugend die Quellen der Fehlereinflüsse separiert werden.

2.2 Berechnung der Ausgangsspannung eines symmetrischen Sensors

2.2.1 Die Berechnung der Frequenzanteile für den idealen Sensor

Für die weitere Betrachtung kann aus der in 2.1.1 hergeleiteten Fourierreihen die Grundwelle als Repräsentant für die ungeradzahlgigen feldunabhängigen Harmonischen und die zweite Oberwelle als Repräsentant für die geradzahlgigen feldproportionalen Harmonischen genutzt werden. Die Harmonischen ergeben sich aus den vier Impulsfolgen wie folgt:

$$\begin{aligned}
 f^{(1)}(\omega t) &= \frac{2A_{11}}{\pi} \left\{ \frac{\sin(\varphi_{11})}{1} \cos(\omega t + \alpha_{11}) \right\} + \frac{2A_{12}}{\pi} \left\{ \frac{\sin(\varphi_{12})}{1} \cos(\omega t + \alpha_{12}) \right\} \\
 &\quad + \frac{2A_{21}}{\pi} \left\{ \frac{\sin(\varphi_{21})}{1} \cos(\omega t + \alpha_{21}) \right\} + \frac{2A_{22}}{\pi} \left\{ \frac{\sin(\varphi_{22})}{1} \cos(\omega t + \alpha_{22}) \right\} \\
 f^{(2)}(\omega t) &= \frac{2A_{11}}{\pi} \left\{ \frac{\sin(2\varphi_{11})}{2} \cos(2\omega t + 2\alpha_{11}) \right\} + \frac{2A_{12}}{\pi} \left\{ \frac{\sin(2\varphi_{12})}{2} \cos(2\omega t + 2\alpha_{12}) \right\} \\
 &\quad + \frac{2A_{21}}{\pi} \left\{ \frac{\sin(2\varphi_{21})}{2} \cos(2\omega t + 2\alpha_{21}) \right\} + \frac{2A_{22}}{\pi} \left\{ \frac{\sin(2\varphi_{22})}{2} \cos(2\omega t + 2\alpha_{22}) \right\}
 \end{aligned}$$

Für die weiteren Berechnungen sollen folgende Anfangswerte definiert werden:

$$A_0 = \frac{B_{Sat}}{H_{Sat}} \frac{2 H_{Err}}{\pi} ; \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{2 H_{Err}} H_{Sat} ; \quad \alpha_0 = \frac{\pi}{2 H_{Err}} H_{Ext}$$

Berechnet man die Frequenzanteile für den idealen Sensor (Sensor und Anregung sind symmetrisch) und vergleicht das Modell mit den in der Literatur verwendeten Modellen, sollten sich bei gleichen Randbedingungen identische Ergebnisse einstellen.

Für den idealen Sensor bei symmetrischer Anregung gilt für die Koeffizienten:

$$\begin{array}{lll}
 A_{11} = A_0 & \varphi_{11} = \varphi_0 & \alpha_{11} = \alpha_0 \\
 A_{12} = -A_0 & \varphi_{12} = \varphi_0 & \alpha_{12} = \pi - \alpha_0 \\
 A_{21} = A_0 & \varphi_{21} = \varphi_0 & \alpha_{21} = \pi + \alpha_0 \\
 A_{22} = -A_0 & \varphi_{22} = \varphi_0 & \alpha_{22} = -\alpha_0
 \end{array}$$

Die Grundwelle und zweite Oberwelle lassen sich wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned}
 f^{(1)}(\omega t) &= \frac{2A_0 \sin(\varphi_0)}{\pi} \{ \cos(\omega t + \alpha_{11}) - \cos(\omega t + \alpha_{12}) + \cos(\omega t + \alpha_{13}) - \cos(\omega t + \alpha_{14}) \} \\
 &= \frac{2A_0 \sin(\varphi_0)}{\pi} \{ \cos(\omega t + \alpha_0) - \cos(\omega t + \pi - \alpha_0) + \cos(\omega t + \pi + \alpha_0) - \cos(\omega t - \alpha_0) \} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f^{(2)}(2\omega t) &= \frac{A_0 \sin(2\varphi_0)}{\pi} \{ \cos(2\omega t + 2\alpha_{11}) - \cos(2\omega t + 2\alpha_{12}) + \cos(2\omega t + 2\alpha_{13}) - \cos(2\omega t + 2\alpha_{14}) \} \\
 &= \frac{A_0 \sin(2\varphi_0)}{\pi} \{ \cos(2\omega t + 2\alpha_0) - \cos(2\omega t + 2\pi - 2\alpha_0) + \cos(2\omega t + 2\pi + 2\alpha_0) - \cos(2\omega t - 2\alpha_0) \} \\
 &= -\frac{4A_0 \sin(2\varphi_0)}{\pi} \sin(2\alpha_0) \sin(2\omega t)
 \end{aligned}$$

Die Grundwelle ist:

- unabhängig vom äußerem Feld gleich Null

Die zweite Harmonische

- ist vom äußerem Feld (über α) abhängig
- liegt in Phase mit der Anregung

Setzt man die Koeffizienten ein, erhält man die Amplitude der zweiten Harmonischen.

$$f^{(2)} = -4 \frac{B_{Sat}}{H_{Sat}} \frac{2\hat{H}_{Err}}{\pi^2} \sin\left(\pi \frac{H_{Sat}}{\hat{H}_{Err}}\right) \sin\left(\pi \frac{H_{Ext}}{\hat{H}_{Err}}\right) \sin(2\omega t)$$

Unter der Voraussetzung, daß das Meßfeld klein gegenüber dem Anregungsfeld ($H_{Ext} \ll H_{Err}$) ist, gilt:

$$f^{(2)} = -\frac{8}{\pi} \frac{B_{Sat}}{H_{Sat}} H_{Ext} \sin\left(\pi \frac{H_{Sat}}{\hat{H}_{Err}}\right) \sin(2\omega t)$$

Die induzierte Spannung (siehe Induktionsgesetz) beträgt somit:

$$U^{(2)} = -\frac{8}{\pi} n A \omega \mu_0 \frac{B_{Sat}}{H_{Sat}} H_{Ext} \sin\left(\pi \frac{H_{Sat}}{\hat{H}_{Err}}\right) \sin(2\omega t)$$

Die Amplitude der zweiten Harmonischen hängt von der Anregung und der Permeabilität des weichmagnetischen Materials ab.

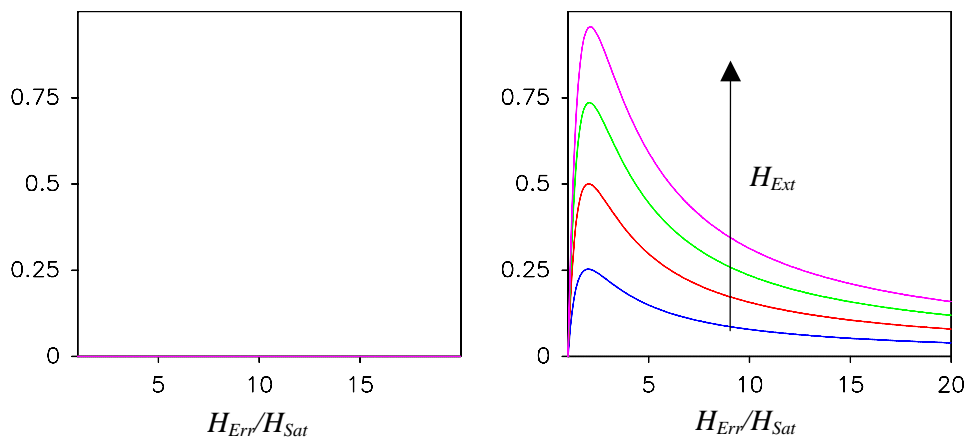


Abbildung 2-13: Amplitude der Grundwelle (links) und der zweiten Harmonischen (rechts) in Abhängigkeit des Quotienten Anregungsfeldstärke / Sättigungsfeldstärke
 Parameter: äußeres Feld $H_{Ext} = 0$ (a) ... 0,4 (e) H_{Sat}
 $H_{Sat} = 1$, $B_{Sat} = 1$, $H_{Err} = 1 \dots 20 H_{Sat}$

Das Ergebnis stimmt mit dem anderer Arbeiten überein. Vergleicht man zum Beispiel die Zusammenstellung der Berechnungen der zweiten Oberwelle von Wiese und Schmidt [Fanslau 1960] mit dem obigen Ergebnis, so sind abgesehen von modellspezifischen Faktoren (z.B. Anregungsform) die gleichen Abhängigkeiten vorhanden. Die Eigenschaften der Aufnahmespule und die Permeabilität gehen linear ein. Bei einem Verhältnis der Anregungsfeldstärke zu Sättigungsfeldstärke von 2 hat die Empfindlichkeit ihr Maximum (siehe Abb. 2-13). Die zweite Oberwelle (wie auch die sich herauskürzenden Grundwellenanteile) liegt ohne Berücksichtigung der Hysterese in Phase zum Anregungssignal.

2.2.2 Einfluß der Asymmetrie der Anregung

Das Anregungsfeld kann asymmetrisch im Sinne einer Ungleichbehandlung der auf- und absteigenden Flanken sein. Die Asymmetrie der Anregung soll durch die zur symmetrischen Anregung um den Faktor k veränderten Steigung beschrieben werden.

Steigung der Anregung = k * *Steigung der symmetrischen Anregung*

$$= k \frac{2 H_{Err}}{\pi}; \quad 0 \leq k \leq 2$$

Im Extremfall ($k=0$ oder $k=2$) handelt es sich um eine sägezahnförmige Anregung.

Bei der Berechnung der Frequenzanteile der Ausgangsspannung gilt für die Koeffizienten:

$A_{11} = A_0 / k$	$\varphi_{11} = \varphi_0 k$	$\alpha_{11} = \alpha_0 k$
$A_{12} = -A_0 / (2 - k)$	$\varphi_{12} = \varphi_0 (2 - k)$	$\alpha_{12} = \pi - \alpha_0 (2 - k)$
$A_{21} = A_0 / (2 - k)$	$\varphi_{21} = \varphi_0 (2 - k)$	$\alpha_{21} = \pi + \alpha_0 (2 - k)$
$A_{22} = -A_0 / k$	$\varphi_{22} = \varphi_0 k$	$\alpha_{22} = -\alpha_0 k$

$$\begin{aligned}
 f^{(1)}(\omega t) &= \frac{2A_0 \sin(\varphi_0 k)}{k\pi} \{ \cos(\omega t + \alpha_0 k) - \cos(\omega t - \alpha_0 k) \} \\
 &\quad - \frac{2A_0 \sin(\varphi_0 (2 - k))}{(2 - k)\pi} \{ \cos(\omega t + \pi - \alpha_0 (2 - k)) - \cos(\omega t + \pi + \alpha_0 (2 - k)) \} \\
 &= \frac{4A_0}{\pi} \left\{ -\frac{\sin(\varphi_0 k) \sin(\alpha_0 k)}{k} + \frac{\sin(\varphi_0 (2 - k)) \sin(\alpha_0 (2 - k))}{(2 - k)} \right\} \sin(\omega t) \\
 f^{(2)}(2\omega t) &= \frac{A_0 \sin(2\varphi_0 k)}{k\pi} \{ \cos(2\omega t + 2\alpha_0 k) - \cos(2\omega t - 2\alpha_0 k) \} \\
 &\quad - \frac{A_0 \sin(2\varphi_0 (2 - k))}{(2 - k)\pi} \{ \cos(2\omega t + 2\pi - 2\alpha_0 (2 - k)) - \cos(2\omega t + 2\pi + 2\alpha_0 (2 - k)) \} \\
 &= -\frac{2A_0}{\pi} \left\{ \frac{\sin(2\varphi_0 k) \sin(2\alpha_0 k)}{k} + \frac{\sin(2\varphi_0 (2 - k)) \sin(2\alpha_0 (2 - k))}{(2 - k)} \right\} \sin(2\omega t)
 \end{aligned}$$

Für $H_{Ext} \ll H_{Err}$ gilt $\sin(\alpha_0 k) = k \sin(\alpha_0)$ und $\sin(\alpha_0 (2 - k)) = (2 - k) \sin(\alpha_0)$

$$\begin{aligned}
 f^{(1)}(\omega t) &= \frac{4A_0 \sin(\alpha_0)}{\pi} \{ -\sin(\varphi_0 k) + \sin(\varphi_0 (2 - k)) \} \sin(\omega t) \\
 &= \frac{8A_0 \sin(\alpha_0)}{\pi} \cos(\varphi_0) \sin((1 - k)\varphi_0) \sin(\omega t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f^{(2)}(2\omega t) &= -\frac{4A_0 \sin(\alpha_0)}{\pi} \{ \sin(2\varphi_0 k) + \sin(2\varphi_0 (2-k)) \} \sin(2\omega t) \\
 &= -\frac{8A_0 \sin(\alpha_0)}{\pi} \sin(2\varphi_0) \cos(2(1-k)\varphi_0) \sin(2\omega t)
 \end{aligned}$$

Für die Extremfälle lassen sich die Frequenzanteile wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned}
 K=0 &\Rightarrow f^{(1)}(\omega t) = \frac{4}{\pi} A_0 \sin(\alpha_0) \sin(2\varphi_0) \sin(\omega t) \\
 &\quad f^{(2)}(2\omega t) = -\frac{4}{\pi} A_0 \sin(\alpha_0) \sin(4\varphi_0) \sin(2\omega t) \\
 K=1 &\Rightarrow f^{(1)}(\omega t) = 0 \\
 &\quad f^{(2)}(2\omega t) = -\frac{8}{\pi} A_0 \sin(\alpha_0) \sin(2\varphi_0) \sin(2\omega t) \\
 K=2 &\Rightarrow f^{(1)}(\omega t) = -\frac{4}{\pi} A_0 \sin(\alpha_0) \sin(2\varphi_0) \sin(\omega t) \\
 &\quad f^{(2)}(2\omega t) = -\frac{4}{\pi} A_0 \sin(\alpha_0) \sin(4\varphi_0) \sin(2\omega t)
 \end{aligned}$$

Die durch die Asymmetrie der Anregung erzeugte Grundwelle ist:

- vom externen Feld abhängig
- geht mit dem Sinus der Symmetrieabweichung von positiver zu negativer Flanke ein
- liegt in Phase zur Anregung.

Die Amplitude der feldabhängigen zweiten Harmonischen:

- nimmt mit dem Kosinus der Symmetrieabweichung von positiver zu negativer Flanke ab.
- Bei geringer Erregerfeldstärke reagiert der Sensor sensibler auf Symmetrieänderungen.

2.2.3 Einfluß eines durch den Anregungsstrom aufgeprägten Gleichfeldes

Hervorgerufen durch eine DC Komponente im Anregungsstrom kann dem Sensor ein Gleichfeld aufgeprägt werden. Dieses Gleichfeld wirkt in beiden Segmenten des Kerns in entgegengesetzter Richtung.

Die Asymmetrie soll durch eine Erhöhung des externen Feldes (normiert auf die Sättigungsfeldstärke) im Ringkernsegment 1 und eine Verringerung des externen Feldes im Ringkernsegment 2 beschrieben werden.

Für das Feld in den Ringkernsegmenten gilt:

$$H^+ = H_{Ext} + (1-k) H_{Sat}$$

$$H^- = H_{Ext} - (1-k) H_{Sat}$$

Die Amplitude und die Breite der induzierten Impulse bleiben unberührt.

Die Lage der Impulse (α) wird wie folgt beeinflusst:

$$\begin{aligned}\alpha^+ &= \frac{\pi}{2H_{Err}} (H_{Ext} + (1-k)H_{Sat}) & \alpha^- &= \frac{\pi}{2H_{Err}} (H_{Ext} - (1-k)H_{Sat}) \\ &= \alpha_0 + (1-k)\varphi_0 & &= \alpha_0 - (1-k)\varphi_0\end{aligned}$$

Somit gilt für die Koeffizienten:

$$\begin{array}{lll}A_{11} = A_0 & \varphi_{11} = \varphi_0 & \alpha_{11} = \alpha_0 + (1-k)\varphi_0 \\ A_{12} = -A_0 & \varphi_{12} = \varphi_0 & \alpha_{12} = \pi - \alpha_0 - (1-k)\varphi_0 \\ A_{21} = A_0 & \varphi_{21} = \varphi_0 & \alpha_{21} = \pi + \alpha_0 - (1-k)\varphi_0 \\ A_{22} = -A_0 & \varphi_{22} = \varphi_0 & \alpha_{22} = -\alpha_0 + (1-k)\varphi_0\end{array}$$

Die Frequenzanteile berechnen sich wie folgt:

$$\begin{aligned}f^{(1)}(\omega t) &= \frac{2A_0 \sin(\varphi_0)}{\pi} \left\{ \cos(\omega t + \alpha_0 + (1-k)\varphi_0) - \cos(\omega t + \pi - \alpha_0 - (1-k)\varphi_0) \right. \\ &\quad \left. + \cos(\omega t + \pi + \alpha_0 - (1-k)\varphi_0) - \cos(\omega t - \alpha_0 + (1-k)\varphi_0) \right\} \\ &= -\frac{8A_0 \sin(\varphi_0)}{\pi} \sin(\alpha_0) \sin((1-k)\varphi_0) \cos(\omega t) \\ f^{(2)}(2\omega t) &= \frac{A_0 \sin(2\varphi_0)}{\pi} \left\{ \cos(2\omega t + 2\alpha_0 + 2(1-k)\varphi_0) - \cos(2\omega t + 2\pi - 2\alpha_0 - 2(1-k)\varphi_0) \right\} \\ &\quad + \cos(2\omega t + 2\pi + 2\alpha_0 - 2(1-k)\varphi_0) - \cos(2\omega t - 2\alpha_0 + 2(1-k)\varphi_0) \\ &= -\frac{4A_0 \sin(2\varphi_0)}{\pi} \sin(2\alpha_0) \cos(2(1-k)\varphi_0) \sin(2\omega t)\end{aligned}$$

Die erzeugte Grundwelle ist:

- vom externen Feld abhängig
- geht mit dem Sinus des Verhältnisses von Offsetfeldstärke zu Sättigungsfeldstärke ein
- die Phasenlage liegt 90° zur Anregung verschoben.

Die Amplitude der feldabhängigen zweiten Harmonischen

- nimmt mit dem Kosinus des Verhältnisses von Offsetfeldstärke zu Sättigungsfeldstärke ab.

2.2.4 Einfluß der Asymmetrie der Hysterese

Eine Asymmetrie der Hysterese mit unterschiedlicher positiver und negativer Sättigungsfeldstärke läßt sich durch eine Verschiebung der Hysterese entlang der H-Achse simulieren. Die Verschiebung wird durch den mit der halben Sättigungsfeldstärke normierten Faktor (1-k) beschrieben.

$$\begin{aligned}H_{Sat}^+ &= H_{Sat} - (1-k)H_{Sat} / 2 \\ &= H_{Sat} / 2 + k H_{Sat} / 2 \\ H_{Sat}^- &= -H_{Sat} - (1-k)H_{Sat} / 2 \\ &= -3H_{Sat} / 2 + k H_{Sat} / 2\end{aligned}$$

Die Amplitude und die Breite der induzierten Impulse bleibt unberührt.

Die Lage der Impulse (α) wird wie folgt beeinflusst:

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\pi}{2H_{Err}} (H_{Sat}^+ + H_{Sat}^- + H_{Ext}) \\ &= \frac{\pi}{2H_{Err}} H_{Ext} - (1-k) \frac{\pi}{2H_{Err}} H_{Sat} \\ &= \alpha_0 - (1-k) \varphi_0\end{aligned}$$

Somit gilt für die Koeffizienten:

$A_{11} = A_0$	$\varphi_{11} = \varphi_0$	$\alpha_{11} = \alpha_0 - (1-k) \varphi_0$
$A_{12} = -A_0$	$\varphi_{12} = \varphi_0$	$\alpha_{12} = \pi - \alpha_0 + (1-k) \varphi_0$
$A_{21} = A_0$	$\varphi_{21} = \varphi_0$	$\alpha_{21} = \pi + \alpha_0 - (1-k) \varphi_0$
$A_{22} = -A_0$	$\varphi_{22} = \varphi_0$	$\alpha_{22} = -\alpha_0 + (1-k) \varphi_0$

Die Frequenzanteile berechnen sich wie folgt:

$$\begin{aligned}f^{(1)}(\omega t) &= \frac{2A_0 \sin(\varphi_0)}{\pi} \left\{ \cos(\omega t + \alpha_0 - (1-k)\varphi_0) - \cos(\omega t + \pi - \alpha_0 + (1-k)\varphi_0) \right. \\ &\quad \left. + \cos(\omega t + \pi + \alpha_0 - (1-k)\varphi_0) - \cos(\omega t - \alpha_0 + (1-k)\varphi_0) \right\} \\ &= 0 \\ f^{(2)}(2\omega t) &= \frac{A_0 \sin(2\varphi_0)}{\pi} \left\{ \cos(2\omega t + 2\alpha_0 - 2(1-k)\varphi_0) - \cos(2\omega t + 2\pi - 2\alpha_0 + 2(1-k)\varphi_0) \right. \\ &\quad \left. + \cos(2\omega t + 2\pi + 2\alpha_0 - 2(1-k)\varphi_0) - \cos(2\omega t - 2\alpha_0 + 2(1-k)\varphi_0) \right\} \\ &= -\frac{4A_0 \sin(2\varphi_0)}{\pi} \sin(2\alpha_0 - 2(1-k)\varphi_0) \sin(2\omega t)\end{aligned}$$

Die Grundwelle ist:

- unabhängig von der Verschiebung der Hysterese gleich Null

Die erzeugte zweite Harmonische ist

- feldunabhängig und somit ein Offset und
- liegt in Phase mit der Anregung.

2.2.5 Zusammenstellung der Fehlereinflüsse bei einem symmetrischen Sensor

In der folgenden Tabelle sind die Frequenzanteile für den fehlerfreien Fall und für die drei behandelten Fehlereinflüsse zusammengestellt:

Fehler	ωt	$2\omega t$
ohne Fehlereinflüsse	0	$-\frac{4A_0 \sin(2\varphi_0)}{\pi} \sin(2\alpha_0) \sin(2\omega t)$
Taktverhältnis der Anregung gestört	$-\frac{8A_0 \cos(\varphi_0)}{\pi} \sin(\alpha_0) \sin(\varphi_0(1-k)) \sin(\omega t)$	$-\frac{4A_0 \sin(2\varphi_0)}{\pi} \sin(2\alpha_0) \cos(2\varphi_0(1-k)) \sin(2\omega t)$
Anregungsstrom mit Offset behaftet	$-\frac{8A_0 \sin(\varphi_0)}{\pi} \sin(\alpha_0) \sin(\varphi_0(1-k)) \cos(\omega t)$	$-\frac{4A_0 \sin(2\varphi_0)}{\pi} \sin(2\alpha_0) \cos(2\varphi_0(1-k)) \sin(2\omega t)$
Asymmetrie der Hysterese	0	$-\frac{4A_0 \sin(2\varphi_0)}{\pi} \sin(2\alpha_0 - 2\varphi_0(1-k)) \sin(2\omega t)$

Im Fall ($k=1$) führen alle Berechnungen wieder auf den symmetrischen Sensor ohne Fehlereinflüsse zurück. Ersetzt man die Winkel α_0 und φ_0 und die Amplitude A_0 durch die Feldgrößen H_{Sat} , B_{Sat} , H_{Err} und H_{Ext} und nimmt man die Anregungsfeldstärke als groß gegenüber Sättigungs- und externer Feldstärke an, so ergeben sich die in der folgenden Tabelle zusammengefaßten Näherungen für die Fehlereinflüsse.

Fehler	ωt	$2\omega t$
ohne Fehlereinflüsse	0	$-8 \frac{B_{Sat}}{H_{Err}} H_{Ext} \sin(2\omega t)$
Taktverhältnis der Anregung gestört	$-4 \frac{B_{Sat}}{H_{Err}} H_{Ext} (1-k) \sin(\omega t)$	$-8 \frac{B_{Sat}}{H_{Err}} H_{Ext} \sin(2\omega t)$
Anregungsstrom mit Offset behaftet	$-4 \frac{B_{Sat}}{H_{Err}} H_{Ext} (1-k) \cos(\omega t)$	$-8 \frac{B_{Sat}}{H_{Err}} H_{Ext} \sin(2\omega t)$
Asymmetrie der Hysterese	0	$-\left(8 \frac{B_{Sat}}{H_{Err}} H_{Ext} + \frac{1-k}{\pi H_{Err}}\right) \sin(2\omega t)$

Grundwellenanteile treten nur bei Anregungsfehlern auf. In Abhängigkeit der Fehler ist das in der Sekundärspule induzierte Signal in Phase (bei gestörtem Taktverhältnis) oder um 90° zur Anregungsfrequenz verschoben (bei mit Offset behafteten Anregungsstrom). Das induzierte Signal ist in beiden Fällen proportional zum externen Feld. Eine asymmetrische Hysterese bleibt ohne Folgen für die Grundwelle.

Der Einfluß der Anregungsfehler auf die zweite Harmonische ist vernachlässigbar da beide Fehler mit dem Kosinus eingehen. Die Asymmetrie der Hysterese jedoch produziert einen vom externen Feld unabhängigen Anteil an zweiter Harmonischen und täuscht somit ein externes Feld vor.

Würde man einen Sensor mit idealer Geometrie in ein Nullfeld bringen, darf nach obiger Analyse keine Grundwelle vorhanden sein. Die Amplitude der zweiten Harmonischen wäre Maß für die Asymmetrie der Hysterese. Mit dem Zuschalten eines externen Feldes würden Grundwellenanteile auf Grund der Anregungsfehler entstehen.

Das Verhalten widerspricht jedoch den praktischen Erfahrungen, da der reale Nullrest im Gegensatz zu den beschriebenen Eigenschaften einen Anteil an Grundwelle besitzt und die Asymmetrie der Anregung sehr wohl die zweite Harmonische beeinflusst. Ein realitätsnahes Sensormodell muß demzufolge die Asymmetrie des Sensors berücksichtigen.

2.3 Berechnung der Ausgangsspannung eines asymmetrischen Sensors

2.3.1 Berechnung der Frequenzanteile bei einem Einzelkernsensor

Eine Asymmetrie im Sensor lässt sich einfach durch eine reduzierte Empfindlichkeit eines Sensorsegmentes erklären. Die Signalamplitude wird in beiden Kreissegmenten unterschiedlich bewertet. Die Lage der Impulse bleibt unverändert (Extremfall Einzelkernsensor).

$$\begin{array}{lll}
 A_{11} = A_0 & \varphi_{11} = \varphi_0 & \alpha_{11} = \alpha_0 \\
 A_{12} = -A_0 & \varphi_{12} = \varphi_0 & \alpha_{12} = \pi - \alpha_0 \\
 A_{21} = k A_0 & \varphi_{21} = \varphi_0 & \alpha_{21} = \pi + \alpha_0 \\
 A_{22} = -k A_0 & \varphi_{22} = \varphi_0 & \alpha_{22} = -\alpha_0
 \end{array}$$

Die Frequenzanteile berechnen sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
 f^{(1)}(\omega t) &= \frac{2A_0 \sin(\varphi_0)}{\pi} \left\{ \cos(\omega t + \alpha_0) - \cos(\omega t + \pi - \alpha_0) \right. \\
 &\quad \left. + k \cos(\omega t + \pi + \alpha_0) - k \cos(\omega t - \alpha_0) \right\} \\
 &= \frac{4A_0 \sin(\varphi_0)}{\pi} (1 - k) \cos(\alpha_0) \cos(\omega t) \\
 f^{(2)}(2\omega t) &= \frac{A_0 \sin(2\varphi_0)}{\pi} \left\{ \cos(2\omega t + 2\alpha_0) - \cos(2\omega t + 2\pi - 2\alpha_0) \right. \\
 &\quad \left. + k \cos(2\omega t + 2\pi + 2\alpha_0) - k \cos(2\omega t - 2\alpha_0) \right\} \\
 &= -\frac{2A_0 \sin(2\varphi_0)}{\pi} (1 + k) \sin(2\alpha_0) \sin(2\omega t)
 \end{aligned}$$

Die erzeugte Grundwelle ist:

- unabhängig vom externen Feld
- nimmt proportional der Asymmetrie des Sensors zu
- die Phasenlage liegt 90° zur Anregung verschoben.

Die Amplitude der zweiten Harmonischen ist

- vom externen Feld abhängig
- liegt in Phase mit der Anregung
- wird proportional zur Asymmetrie des Sensors gedämpft. Im Extremfall ($k=0$; Einzelstab) sinkt die Empfindlichkeit auf 50%.

Auf Grund der Proportionalität genügt die Betrachtung eines Einzelsegmentes. Die Amplitude der Frequenzanteile ergibt sich aus der Summe des symmetrischen Anteils und dem mit dem Symmetriefaktor multiplizierten Anteils eines Einzelkerns.

Im Folgenden soll repräsentativ für den asymmetrischen Fall der Einzelkernsensor betrachtet werden.

Für die Frequenzanteile eines Einzelkernsensors ($k=0$) gilt:

$$f^{(1)}(\omega t) = \frac{4A_0 \sin(\varphi_0)}{\pi} \cos(\alpha_0) \cos(\omega t)$$

$$f^{(2)}(2\omega t) = -\frac{2A_0 \sin(2\varphi_0)}{\pi} \sin(2\alpha_0) \sin(2\omega t)$$

Abbildung 2-14 zeigt die Empfindlichkeit eines Einzelkernsensors. Die Grundwelle und die zweite Oberwelle sind in Abhängigkeit des Verhältnisses Erreger- zu Sättigungsfeld für verschiedene externe Felder für einen Einzelkernsensor dargestellt.

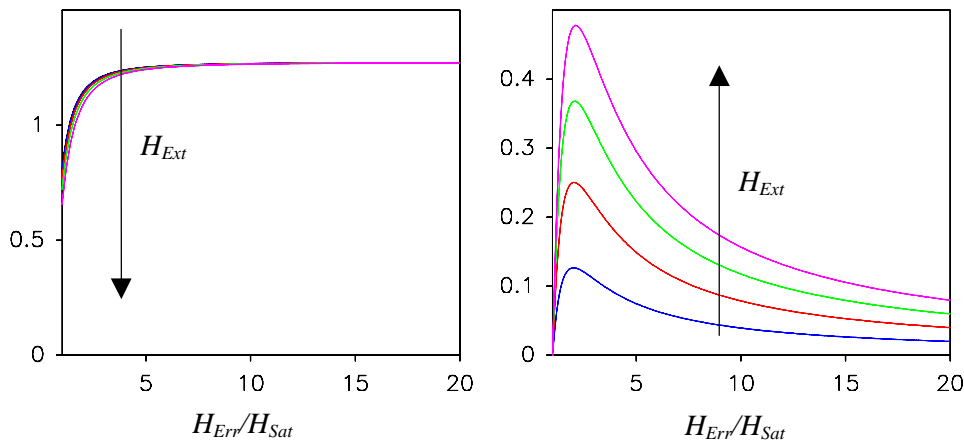


Abbildung 2-14: Amplitude der Grundwelle (links) und der zweiten Harmonischen (rechts) in Abhängigkeit des Quotienten Anregungsfeldstärke / Sättigungsfeldstärke
Parameter: äußeres Feld $H_{Ext} = 0$ (a) ... 0,4 (e) H_{Sat}
 $H_{Sat} = 1$, $B_{Sat} = 1$, $H_{Err} = 1 \dots 20 H_{Sat}$

2.3.2 Einfluß der Asymmetrie der Anregung

Analog zu 2.2.2 folgt für die Frequenzanteile:

$$f^{(1)}(\omega t) = \frac{2A_0 \sin(\varphi_0 k)}{k\pi} \{\cos(\omega t + \alpha_0 k)\} - \frac{2A_0 \sin(\varphi_0 (2-k))}{(2-k)\pi} \{\cos(\omega t + \pi - \alpha_0 (2-k))\}$$

$$= \frac{2A_0}{\pi} \left\{ \frac{\sin(\varphi_0 k) \cos(\omega t + \alpha_0 k)}{k} + \frac{\sin(\varphi_0 (2-k)) \cos(\omega t - \alpha_0 (2-k))}{(2-k)} \right\}$$

$$f^{(2)}(2\omega t) = \frac{A_0 \sin(2\varphi_0 k)}{k\pi} \{\cos(2\omega t + 2\alpha_0 k)\} - \frac{A_0 \sin(2\varphi_0 (2-k))}{(2-k)\pi} \{\cos(2\omega t + 2\pi - 2\alpha_0 (2-k))\}$$

$$= \frac{A_0}{\pi} \left\{ \frac{\sin(2\varphi_0 k) \cos(2\omega t + 2\alpha_0 k)}{k} - \frac{\sin(2\varphi_0 (2-k)) \cos(2\omega t - 2\alpha_0 (2-k))}{(2-k)} \right\}$$

Die Frequenzanteile im Nullfeld $\left(\alpha_0 = \frac{\pi}{2H_{Err}} H_{Ext} = 0 \right)$ betragen :

$$f^{(1)}(\omega t) = \frac{2A_0}{\pi} \left\{ \frac{\sin(\varphi_0 k)}{k} + \frac{\sin(\varphi_0 (2-k))}{(2-k)} \right\} \cos(\omega t)$$

$$f^{(2)}(2\omega t) = \frac{A_0}{\pi} \left\{ \frac{\sin(2\varphi_0 k)}{k} - \frac{\sin(2\varphi_0 (2-k))}{(2-k)} \right\} \cos(2\omega t) \approx 0 \text{ für kleine } \varphi_0 \text{ (} H_{Err} \gg H_{Sat} \text{)}$$

Die erzeugte Grundwelle:

- Die Amplitude des feldunabhängigen Anteils (Nullrest) nimmt mit zunehmender Symmetrieabweichung ($k \neq 1$) ab.
- Ein äußeres Feld bewirkt eine weitere Abnahme der Amplitude.
- Die Phase liegt um 90° zur Anregung verschoben.

Die zweite Harmonische:

- Es existiert ein von der Asymmetrie der Anregung abhängiger feldunabhängiger Anteil an zweiter Harmonischen
- Die Phasenlage des feldunabhängigen Anteils ist um 90° zum Anregungssignal verschoben.
- Die Amplitude der feldabhängigen zweiten Harmonischen nimmt aufgrund der einseitig geringeren Steigung der Anregung (siehe auch Abschnitt 2.2.1) mit der Symmetrieabweichung zu.
- Die Phasenlage der feldabhängigen zweiten Harmonischen liegt in Phase mit dem Anregungssignal.

In Abbildung 2-15 wird die Amplitude und die Phase der zweiten Harmonischen dargestellt (Summe von feldabhängigen und feldunabhängigen Anteilen).

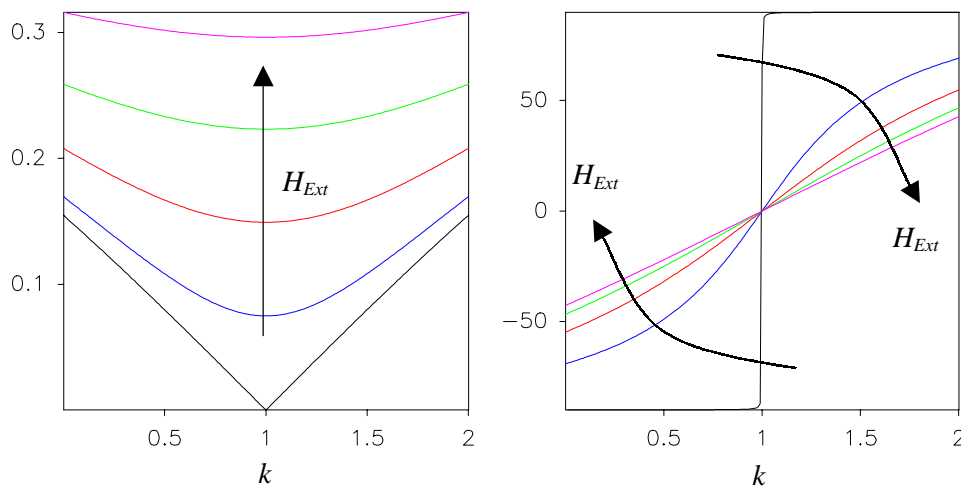


Abbildung 2-15: Amplitude (links) und Phasenlage (rechts) der zweiten Harmonischen in Abhängigkeit der Asymmetrie der Anregung und des äußeren Feldes $H_{Sat} = 1$, $B_{Sat} = 1$, $H_{Err} = 1 \dots 20 H_{Sat}$, $H_{Ext} = 0$ (a) ... 0,4 (e) H_{Sat}

2.3.3 Einfluß eines durch den Anregungsstrom aufgeprägten Gleichfeldes

Analog zu 2.2.3 folgt für die Frequenzanteile:

$$\begin{aligned}
 f^{(1)}(\omega t) &= \frac{2A_0 \sin(\varphi_0)}{\pi} \{ \cos(\omega t + \alpha_0 + (1-k)\varphi_0) - \cos(\omega t + \pi - \alpha_0 - (1-k)\varphi_0) \} \\
 &= \frac{4A_0 \sin(\varphi_0)}{\pi} \{ \cos(\alpha_0 + (1-k)\varphi_0) \} \cos(\omega t) \\
 f^{(2)}(2\omega t) &= \frac{A_0 \sin(2\varphi_0)}{\pi} \{ \cos(2\omega t + 2\alpha_0 + 2(1-k)\varphi_0) - \cos(2\omega t + 2\pi - 2\alpha_0 - 2(1-k)\varphi_0) \} \\
 &= -\frac{2A_0 \sin(2\varphi_0)}{\pi} \{ \sin(2\alpha_0 + 2(1-k)\varphi_0) \} \sin(2\omega t)
 \end{aligned}$$

Die erzeugte Grundwelle:

- Mit dem äußeren Feld ändert sich die Amplitude der Grundwelle nur gering, da das Feld mit den Kosinus eingeht.
- Die Phasenlage der Grundwelle liegt um 90° zur Anregung verschoben.

Die zweite Harmonische:

- Sie besitzt einen feldunabhängigen Anteil.
- Die Amplitude wird durch einen Anregungsoffset nicht beeinflusst.
- Der feldabhängige wie auch der feldunabhängige Anteil liegt in Phase zur Anregung.

2.3.4 Einfluß der Asymmetrie der Hysterese

Analog zu 2.2.4 folgt für die Frequenzanteile:

$$\begin{aligned}
 f^{(1)}(\omega t) &= \frac{2A_0 \sin(\varphi_0)}{\pi} \{ \cos(\omega t + \alpha_0 - (1-k)\varphi_0) - \cos(\omega t + \pi - \alpha_0 + (1-k)\varphi_0) \} \\
 &= \frac{4A_0 \sin(\varphi_0)}{\pi} \{ \cos(\alpha_0 - (1-k)\varphi_0) \} \cos(\omega t) \\
 f^{(2)}(2\omega t) &= \frac{A_0 \sin(2\varphi_0)}{\pi} \{ \cos(2\omega t + 2\alpha_0 - 2(1-k)\varphi_0) - \cos(2\omega t + 2\pi - 2\alpha_0 + 2(1-k)\varphi_0) \} \\
 &= -\frac{2A_0 \sin(2\varphi_0)}{\pi} \{ \sin(2\alpha_0 - 2(1-k)\varphi_0) \} \sin(2\omega t)
 \end{aligned}$$

Die erzeugte Grundwelle:

- Mit dem äußeren Feld ändert sich die Amplitude der Grundwelle nur gering, da das Feld mit den Kosinus eingeht.
- Die Phasenlage der Grundwelle liegt um 90° zur Anregung verschoben.

Die zweite Harmonische:

- Sie besitzt einen feldunabhängigen Anteil.
- Die Amplitude wird durch eine Hystereseabweichung nicht beeinflusst.
- Der feldabhängige wie auch der feldunabhängige Anteil liegt in Phase zur Anregung.

2.3.5 Zusammenstellung der Fehlereinflüsse bei einem asymmetrischen Sensor

In der folgenden Tabelle sind die Frequenzanteile für den fehlerfreien Fall und für die drei behandelten Fehlereinflüsse zusammengestellt. An dieser Stelle sei noch einmal darauf hingewiesen, daß die in der Tabelle angegebenen Formeln für einen Einzelkernsensor als Extremfall für einen asymmetrischen Sensor gelten. Der reale Sensor muß als Reihenschaltung eines symmetrischen Sensors (Abschnitt 2.2.6) und eines asymmetrischen Sensors betrachtet werden.

Fehler	ωt	$2\omega t$
Einzelkern Sensor fehlerfrei	$\frac{4 A_0 \sin(\varphi_0)}{\pi} \cos(\alpha_0) \cos(\omega t)$	$-\frac{2 A_0 \sin(2\varphi_0)}{\pi} \sin(2\alpha_0) \sin(2\omega t)$
Taktverhältnis der Anregung gestört	$\frac{2 A_0}{\pi} \left\{ \frac{\sin(\varphi_0 k) \cos(\omega t + \alpha_0 k)}{k} + \frac{\sin(\varphi_0 (2-k)) \cos(\omega t - \alpha_0 (2-k))}{(2-k)} \right\}$	$\frac{A_0}{\pi} \left\{ \frac{\sin(2\varphi_0 k) \cos(2\omega t + 2\alpha_0 k)}{k} - \frac{\sin(2\varphi_0 (2-k)) \cos(2\omega t - 2\alpha_0 (2-k))}{(2-k)} \right\}$
Anregungsstrom mit Offset behaftet	$\frac{4 A_0 \sin(\varphi_0)}{\pi} \{ \cos(\alpha_0 + (1-k)\varphi_0) \} \cos(\omega t)$	$-\frac{2 A_0 \sin(2\varphi_0)}{\pi} \{ \sin(2\alpha_0 + 2(1-k)\varphi_0) \} \sin(2\omega t)$
Asymmetrie der Hysterese	$\frac{4 A_0 \sin(\varphi_0)}{\pi} \{ \cos(\alpha_0 - (1-k)\varphi_0) \} \cos(\omega t)$	$-\frac{2 A_0 \sin(2\varphi_0)}{\pi} \{ \sin(2\alpha_0 - 2(1-k)\varphi_0) \} \sin(2\omega t)$

Ersetzt man auch hier die Winkel α_0 und φ_0 und die Amplitude A_0 durch die Feldgrößen H_{Sat} , B_{Sat} , H_{Err} und H_{Ext} und nimmt man die Anregungsfeldstärke als groß gegenüber der Sättigungsfeldstärke und der externen Feldstärke an, so ergeben sich die in der folgenden Tabelle zusammengefaßten Näherungen für die Fehlereinflüsse.

Fehler	ωt	$2\omega t$
ohne Fehlereinflüsse	$4 \frac{B_{Sat}}{\pi} \cos(\omega t)$	$-4 \frac{B_{Sat}}{H_{Err}} H_{Ext} \sin(2\omega t)$
Taktverhältnis der Anregung gestört	$4 \frac{B_{Sat}}{\pi} \cos(\omega t) + 2 \frac{B_{Sat}}{H_{Err}} H_{Ext} (1-k) \sin(\omega t)$	$-4 \frac{B_{Sat}}{H_{Err}} H_{Ext} \sin(2\omega t)$
Anregungsstrom mit Offset behaftet	$4 \frac{B_{Sat}}{\pi} \cos(\omega t) - \pi \frac{B_{Sat} H_{Sat}}{H_{Err}^2} H_{Ext} (1-k) \cos(\omega t)$	$-\left(4 \frac{B_{Sat}}{H_{Err}} H_{Ext} - \frac{1-k}{\pi H_{Err}} \right) \sin(2\omega t)$
Asymmetrie der Hysterese	$4 \frac{B_{Sat}}{\pi} \cos(\omega t) + \pi \frac{B_{Sat} H_{Sat}}{H_{Err}^2} H_{Ext} (1-k) \cos(\omega t)$	$-\left(4 \frac{B_{Sat}}{H_{Err}} H_{Ext} + \frac{1-k}{\pi H_{Err}} \right) \sin(2\omega t)$

Es existiert immer ein vom äußeren Feld unabhängiger Anteil an Grundwelle, der, wie schon im Fall des symmetrischen Sensors, durch feldabhängige Anteile ergänzt wird. In Praxis ist der konstante Anteil an Grundwelle meist sehr viel größer als der über Feld und Fehler erzeugte Anteil. Neben dem feldproportionalen Anteil an zweiter Harmonischen wird bei einem asymmetrischen Sensor auch im Fall des offsetbehafteten Anregungsstrom ein feldunabhängiger Anteil an zweiter Harmonischer erzeugt. Ein in der Symmetrie gestörtes Taktverhältnis der Anregung erzeugt eine feldabhängige Phasenverschiebung der zweiten Harmonischen. Auf Grund der Kosinusabhängigkeit kann diese aber vernachlässigt werden. Kombiniert man symmetrisches und asymmetrisches Modell, läßt sich ein der Realität nahe kommendes Ausgangssignal generieren. Insbesondere das Frequenzspektrum des Nullrestes läßt sich mit diesen Modellen erklären.

2.4 Berechnung der magnetischen Achse eines Sensors unter Berücksichtigung der Feldgegenkopplung

Die unbekannte Lage und die Instabilität der magnetischen Achse eines Sensors ist eine der Hauptfehlerquellen, vor allem bei Ringkernmagnetometern. Unsicherheiten in der Messung von Komponenten quer zum Hauptfeld, meist als Nullpunktdrift interpretiert, sind oftmals auf Instabilitäten von Ringkern oder Spulen zurückzuführen. In Abbildung 2-16 sind die drei die Richtung der magnetischen Achse bestimmenden Sensorteile (Kern, Sekundärspule und Gegenkopplungsspule) schematisch dargestellt.

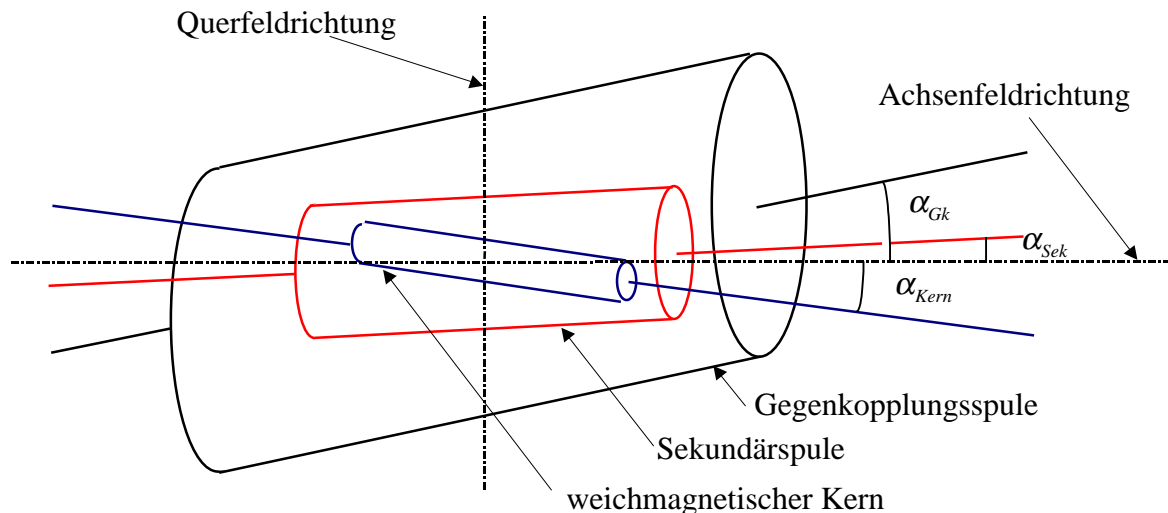


Abbildung 2-16: Definition der Winkel zwischen den Spulenachsen

Die Ausrichtung der folgenden drei Sensorbestandteile geht in die Bestimmung der Richtung der magnetischen Achse eines Fluxgate Sensors ein. Es sind dies:

- Die Ausrichtung des weichmagnetischen Kerns.
- Die Ausrichtung der Sekundärspule.
- Die Ausrichtung der Gegenkopplungsspule.

Die magnetische Achse eines Sensors ohne Gegenkopplung

Im Leerlauf wird die magnetische Achse ausschließlich von der Ausrichtungen des weichmagnetischen Kerns und der Sekundärspule bestimmt. Der jeweilige Einfluß auf die Leerlaufachse hängt von der Geometrie ab. Juri Afanasev [Afanasev 1986] geht ausführlich auf den Einfluß unterschiedlicher geometrischer Anordnungen auf die magnetische Achse von Fluxgate Magnetometern ein. Vergleicht man mit Ring- und Doppelkern die gebräuchlichsten Anordnungen weichmagnetischen Materials, gilt allgemein:

- Der Stabkern hat auf Grund des großen Länge/Durchmesser Verhältnisses hinsichtlich externer Felder einen geringen Entmagnetisierungsfaktor und somit eine hohe effektive Permeabilität. Er bündelt stark externe Felder und dominiert somit die magnetische Achse.
- Bei Ringkernsensoren wird die magnetische Achse im Leerlauf sowohl durch die Lage des Kerns als auch durch die Ausrichtung der Sekundärspule bestimmt. Grund dafür ist der hohe Entmagnetisierungsfaktor und die daraus folgende geringe effektive Permeabilität hinsichtlich externer Felder. Bei Ringkernen wirkt für externe Felder ausschließlich das geringe Länge/Durchmesser Verhältnis des in Meßrichtung liegenden Kernsegmentes. Ringkerne können nur eine Meßebeane, nicht aber eine Meßrichtung festlegen. Die Drehung

eines Ringkernes bei fester Sekundärspule ergab bei Sensoren, wie sie für Equator-S verwendet wurden, Winkelablagen bis zu einem Grad. Grund dafür ist der Einfluß der Inhomogenität des weichmagnetischen Materials auf die magnetische Achse.

Daraus folgt, daß der Ringkern hinsichtlich der Definition der Achsenrichtung dem Stabkern deutlich unterlegen ist. Hinzu kommt, daß auch die Sekundärspule im Gegensatz zu Stabkernsensoren nicht lang und dünn gestaltet werden kann. Es werden meist dem Ringkern angepaßte Rechteckspulen verwendet. Im Folgenden soll untersucht werden, ob dieser Nachteil des Ringkernes durch die Gegenkopplung kompensiert werden kann.

Die magnetische Achse eines Sensors mit Gegenkopplung

Im gegengekoppelten System wird durch die Gegenkopplungswicklung ein zum externen Feld entgegengesetztes Feld erzeugt. Der Sensor wird so durch eine dynamische Kompensation im Nullfeld gehalten. Für den gegengekoppelten Kreis gilt das folgende Blockschaltbild:

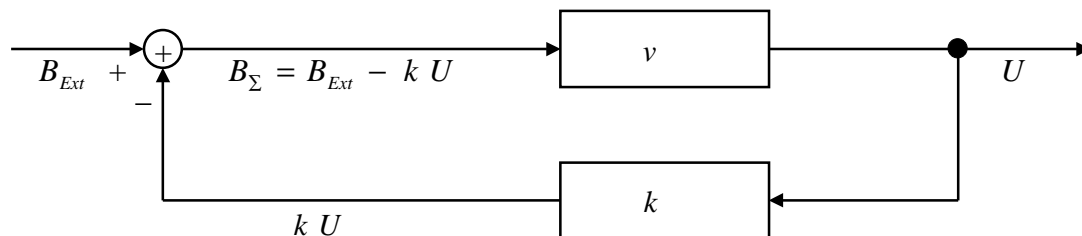


Abbildung 2-17: Blockschaltbild der Gegenkopplung

Die Ausgangsspannung berechnet sich wie folgt:

$$U = v (B_{Ext} - k U)$$

mit v Leerlaufverstärkung in V / nT

$$U = B_{Ext} \frac{v}{1 + k v}$$

k Gegenkopplungsfaktor in nT / V

Bei großen Gegenkopplungsfaktoren ($vk \gg 1$) spielt die Leerlaufverstärkung keine Rolle. Die Verstärkung wird ausschließlich vom Gegenkopplungsfaktor dominiert. Die Betrachtung der Skalenwertstabilität reduziert sich auf die Untersuchung von Stabilität und Temperaturabhängigkeit des Gegenkopplungsstromes und der Gegenkopplungsspule. Um die Richtungsabhängigkeit zu untersuchen, soll das magnetische Feld in einer Ebene mit zwei Sensoren vermessen werden. Eine zweidimensionale Betrachtung erlaubt die Annahme des Magnetfeldes als Vektor sowie die Analyse des Übersprechens von Gegenkopplungsfeldern auf benachbarte Komponenten. Die reale, dreidimensionale Modellannahme würde keine zusätzlichen Informationen liefern.

Die Leerlaufachse der X-Komponente wird als nominelle X-Achse definiert. So bleiben drei Winkel, die die magnetischen Achsen des zweidimensionalen Sensorsystems bestimmen:

- β ist der Winkel zwischen der nominellen Y-Achse und der Y-Leerlaufachse
- α_x ist der Winkel zwischen der nominellen X-Achse und der Richtung der Gegenkopplungswicklung der X-Achse
- α_y ist der Winkel zwischen der nominellen Y-Achse und der Richtung der Gegenkopplungswicklung der Y-Achse

Für zwei senkrecht aufeinander stehende Sensoren mit fehlerbehafteten Leerlauf- und Gegenkopplungsachsen gilt das folgende Blockschaltbild:

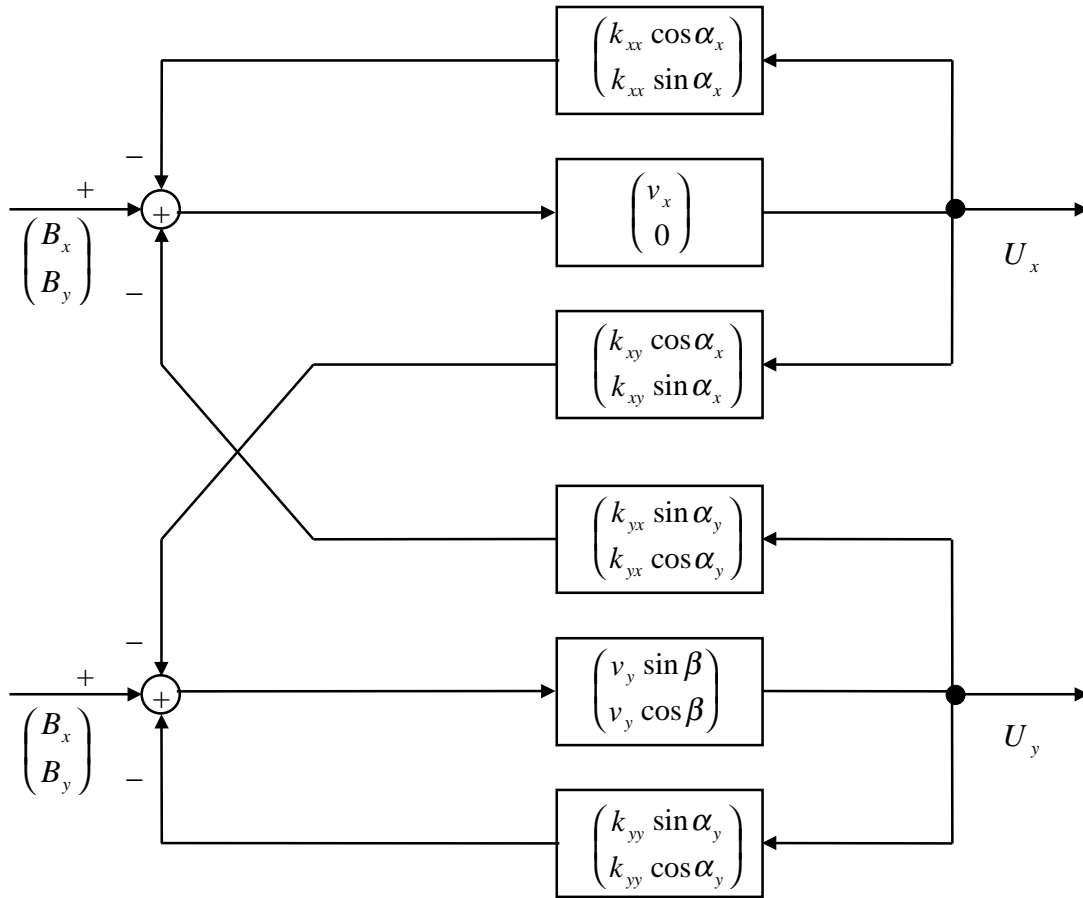


Abbildung 2-18: Blockschaltbild der Vektor-Gegenkopplung

Für die Ausgangsspannungen gilt:

$$U_x = v_x (B_x - k_{xx} \cos \alpha_x U_x - k_{yx} \sin \alpha_y U_y)$$

$$U_y = v_y \sin \beta (B_x - k_{yy} \sin \alpha_y U_y - k_{xy} \cos \alpha_x U_x) + v_y \cos \beta (B_y - k_{yy} \cos \alpha_y U_y - k_{xy} \sin \alpha_x U_x)$$

Stellt man die erste Gleichung nach B_x und die zweite Gleichung nach B_y um, gilt:

$$B_x = U_x \left(\frac{1}{v_x} + k_{xx} \cos \alpha_x \right) + U_y (k_{yx} \sin \alpha_y)$$

$$B_y = U_x (\tan \beta k_{xy} \cos \alpha_x + k_{xy} \sin \alpha_x) + U_y \left(\frac{1}{v_y \cos \beta} + \tan \beta k_{yy} \sin \alpha_y + k_{yy} \cos \alpha_y \right) + \tan \beta B_x$$

Eine Übertragungsmatrix mit Skalenwerten (Empfindlichkeit in Achsenrichtung) und Orthogonalitätsfehlern (gegenseitige Beeinflussung der Komponenten) soll wie folgt eingeführt werden:

$$\begin{pmatrix} U_x \\ U_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Sk_x & O_{xy} \\ O_{yx} & Sk_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix}$$

Ziel ist es, die Abhängigkeit der Matrixwerte von den Mißweisungen der Spulenachsen zu ermitteln.

Berechnet man die Werte der Übertragungsmatrix, erhält man folgendes Ergebnis:

$$\begin{aligned}
 Sk_x &= \frac{-v_x v_y \left(k_{yx} \sin \alpha_y \tan \beta - \left(\frac{1}{v_y \cos \beta} + k_{yy} (\sin \alpha_y \tan \beta + \cos \alpha_y) \right) \right)}{(1 + v_x k_{xx} \cos \alpha_x) \left(\frac{1}{\cos \beta} + v_x k_{yy} (\sin \alpha_y \tan \beta + \cos \alpha_y) \right) - v_x v_y k_{xy} k_{yx} \sin \alpha_y (\cos \alpha_x \tan \beta + \sin \alpha_x)} \\
 O_{yx} &= \frac{-v_x v_y k_{yx} \sin \alpha_y}{(1 + v_x k_{xx} \cos \alpha_x) \left(\frac{1}{\cos \beta} + v_x k_{yy} (\sin \alpha_y \tan \beta + \cos \alpha_y) \right) - v_x v_y k_{xy} k_{yx} \sin \alpha_y (\cos \alpha_x \tan \beta + \sin \alpha_x)} \\
 O_{xy} &= \frac{v_x v_y \left(\frac{1}{v_x} (1 + v_x k_{xx} \cos \alpha_x) \tan \beta - k_{xy} (\cos \alpha_x \tan \beta + \sin \alpha_x) \right)}{(1 + v_x k_{xx} \cos \alpha_x) \left(\frac{1}{\cos \beta} + v_x k_{yy} (\sin \alpha_y \tan \beta + \cos \alpha_y) \right) - v_x v_y k_{xy} k_{yx} \sin \alpha_y (\cos \alpha_x \tan \beta + \sin \alpha_x)} \\
 Sk_y &= \frac{v_x v_y \left(\frac{1}{v_x} + k_{xx} \cos \alpha_x \right)}{(1 + v_x k_{xx} \cos \alpha_x) \left(\frac{1}{\cos \beta} + v_x k_{yy} (\sin \alpha_y \tan \beta + \cos \alpha_y) \right) - v_x v_y k_{xy} k_{yx} \sin \alpha_y (\cos \alpha_x \tan \beta + \sin \alpha_x)}
 \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung, daß das Produkt von Leerlaufverstärkung und Gegenkopplungskonstante sehr viel größer als eins ist, ergeben sich folgende Matrixwerte:

$$\begin{aligned}
 Sk_x &= \frac{v_y k_{yx} \sin \alpha_y \sin \beta - v_y k_{yy} \sin \alpha_y \sin \beta - k_{yy} \cos \alpha_y}{-k_{xx} k_{yy} \cos \alpha_x (\sin \alpha_y \tan \beta + \cos \alpha_y) + k_{xy} k_{yx} \sin \alpha_y (\cos \alpha_x \tan \beta + \sin \alpha_x)} \\
 O_{yx} &= \frac{k_{yx} \sin \alpha_y}{-k_{xx} k_{yy} \cos \alpha_x (\sin \alpha_y \tan \beta + \cos \alpha_y) + k_{xy} k_{yx} \sin \alpha_y (\cos \alpha_x \tan \beta + \sin \alpha_x) -} \\
 O_{xy} &= \frac{k_{xx} \cos \alpha_x \tan \beta - k_{xy} \cos \alpha_x \tan \beta - k_{xy} \sin \alpha_x}{k_{xx} k_{yy} \cos \alpha_x (\sin \alpha_y \tan \beta + \cos \alpha_y) - k_{xy} k_{yx} \sin \alpha_y (\cos \alpha_x \tan \beta + \sin \alpha_x)} \\
 Sk_y &= \frac{k_{xx} \cos \alpha_x}{k_{xx} k_{yy} \cos \alpha_x (\sin \alpha_y \tan \beta + \cos \alpha_y) - k_{xy} k_{yx} \sin \alpha_y (\cos \alpha_x \tan \beta + \sin \alpha_x)}
 \end{aligned}$$

Werden weiterhin Fehler zweiter Ordnung ($\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 = 0$) vernachlässigt, vereinfachen sich die Matrixwerte wie folgt:

$$\begin{aligned}
 Sk_x &= \frac{1}{k_{xx} \cos \alpha_x} & Sk_y &= \frac{1}{k_{yy} \cos \alpha_y} \\
 O_{xy} &= \frac{k_{xx} \cos \alpha_x \tan \beta - k_{xy} \cos \alpha_x \tan \beta - k_{xy} \sin \alpha_x}{k_{xx} k_{yy} \cos \alpha_x \cos \alpha_y} & O_{yx} &= \frac{-k_{yx} \sin \alpha_y}{k_{xx} k_{yy} \cos \alpha_x \cos \alpha_y}
 \end{aligned}$$

Sonderfälle

- Voneinander unabhängige Sensoren

Die Sensoren sind voneinander unabhängig, wenn das Gegenkopplungsfeld des einen Sensors nicht das des anderen Sensor beeinflusst ($k_{xy} = k_{yx} = 0$):

$$\begin{aligned} Sk_x &= \frac{1}{k_{xx} \cos \alpha_x} & Sk_y &= \frac{1}{k_{yy} \cos \alpha_y} \\ O_{xy} &= \frac{1}{k_{yy} \cos \alpha_y} \tan \beta & O_{yx} &= 0 \end{aligned}$$

- Vektorkompensierte Sensoren

Ist das Sensorsystem vektorkompensiert, befindet sich der eine Sensor im zentralen Gegenkopplungsfeld des anderen Sensors ($k_{xy} = k_{xx}$ und $k_{yx} = k_{yy}$):

$$\begin{aligned} Sk_x &= \frac{1}{k_{xx} \cos \alpha_x} & Sk_y &= \frac{1}{k_{yy} \cos \alpha_y} \\ O_{xy} &= \frac{1}{k_{yy} \cos \alpha_y} \tan \alpha_x & O_{yx} &= 0 \end{aligned}$$

Vergleicht man die beiden Sonderfälle mit der Übertragungsmatrix im nicht gegengekoppelten Fall, sieht man die Verlagerung der Fehlerquellen vom Leerlaufsystem hin zur Gegenkopplungsspule sowohl für die Abweichung vom nominellen Skalenwert als auch für die Abweichung von der Orthogonalität.

Sensorsystem ohne Gegenkopplung	$\begin{bmatrix} v_x & 0 \\ v_y \sin \beta & v_y \cos \beta \end{bmatrix}$
Sensoren mit Gegenkopplung	$\begin{bmatrix} \frac{1}{k_{xx} \cos \alpha_x} & 0 \\ \frac{1}{k_{yy} \cos \alpha_y} \tan \beta & \frac{1}{k_{yy} \cos \alpha_y} \end{bmatrix}$
Sensoren vektorkompensiert	$\begin{bmatrix} \frac{1}{k_{xx} \cos \alpha_x} & 0 \\ \frac{1}{k_{yy} \cos \alpha_y} \tan \alpha_x & \frac{1}{k_{yy} \cos \alpha_y} \end{bmatrix}$

Spielt im Leerlauf ausschließlich die Leerlaufverstärkung und die durch Kern und Sekundärspule gebildete magnetische Achse eine Rolle, so bestimmen im vektorkompensierten Fall ausschließlich die Eigenschaften der Gegenkopplungsspule die Übertragungsfunktion. Bemerkenswert ist, daß bei gegengekoppelten Einzelsensoren, bei denen die Gegenkopplungsfelder unabhängig voneinander sind, zwar der Skalenwert durch die Gegenkopplung stabilisiert wird, jedoch die magnetische Achse - wie im Leerlauf - von Kern und Sekundärspule abhängig ist. Da gerade bei Ringkernen die Leerlaufachse schlecht definiert und somit anfällig für zeitliche und temperaturabhängige Änderungen ist, sind bei der Messung höherer Felder (Erdfeld) vektorkompensierte Systeme im Vorteil.

2.5 Ursachen nichtlinearer Querfeldeinflüsse bei Ringkernsensoren

2.5.1 Querfeldbeeinflussung durch asymmetrische Flußerzeugung im Ringkern

M. Acuna [Acuna 1981] beschrieb den Querfeldeffekt erstmals 1981 und berechnete die Korrekturmatrix für das MAGSAT Magnetometer. F. Primdahl [Primdahl et al. 1992] veröffentlichte 1992 eine Analyse der Querfeldabhängigkeit verschiedener Magnetometer. Auf die Fehlerursache gehen beide Arbeiten nicht ein. H. Kügler führt Linearitätsabweichungen bei der Bestimmung der Übertragungsfunktion eines Magnetometers auf eine durch inhomogene Kompensationsfelder erzeugte Querfeldabhängigkeit zurück [Kügler 1991]. In den folgenden Abschnitten wird erstmals eine Analyse des Entstehungsmechanismus der Querfeldabhängigkeit von Ringkernsensoren dargestellt.

Im Gegensatz zu Stabkernen ist das weichmagnetische Material eines Ringkerns in einer Ebene verteilt. Der Arbeitspunkt auf der Hysterese wird für die parallel zur Feldrichtung liegenden Kreissegmente verschoben. In der Ringkernebene kann man zwischen dem Feldanteil in Meßrichtung und dem senkrecht zur Meßrichtung liegenden Feld unterscheiden. Der in Meßrichtung (parallel zum Sekundär- und Gegenkopplungsspulensystem) liegende Feldanteil erzeugt die feldproportionale zweite Harmonische in Richtung der Sekundärspule. Die in der Sekundärspule induzierte zweite Harmonische wird phasenempfindlich ausgewertet und der in Meßrichtung liegende Feldanteil wird durch die Gegenkopplung kompensiert. Der senkrecht zur Meßrichtung liegende Feldanteil (Querfeld) erzeugt ebenso eine zweite Harmonische. Dieser Feldanteil wird jedoch nicht kompensiert. Im Idealfall addieren sich die in Meßrichtung liegenden Flußanteile und kompensieren sich die quer zur Meßrichtung liegenden. (siehe Abb. 2-19 a).

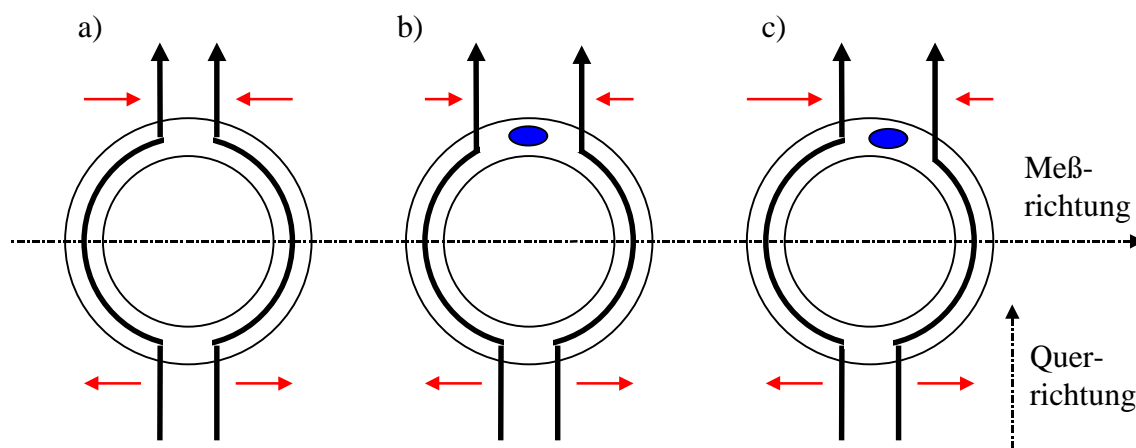


Abbildung 2-19 (a-c): Einfluß der Inhomogenitätsstelle eines Ringkerns auf den magnetischen Fluß

- a: homogener Ringkern im Querfeld
- b: Ringkern mit symmetrisch angeordneter Inhomogenitätsstelle im Querfeld
- c: Ringkern mit asymmetrisch angeordneter Inhomogenitätsstelle im Querfeld

Ist der durch das Querfeld erzeugte magnetische Fluß im Ringkern auf Grund einer Inhomogenität (Bandanfang und -ende, Materialfehler oder Befestigungsstellen) gestört, wird ein Ringkernsegment in Abhängigkeit des Querfeldes weiter angesteuert als das gegenüberliegende Segment. Liegt die Inhomogenitätsstelle symmetrisch zum Querfeld,

kompensieren sich wie beim homogenen Kern die magnetischen Flüsse in der Meßrichtung (Abb. 2-19 b). Ist aber die Inhomogenitätsstelle asymmetrisch zum Querfeld angeordnet, bleibt ein zum Querfeld proportionaler Nettofluß in Meßrichtung übrig (Abb. 2-19 c). Diese Einkopplung ist identisch einer Winkelablage und meßtechnisch nicht von ihr zu trennen. Praktisch ist eine proportionale Einkopplung des Querfeldes auch nicht von Interesse, da die magnetische Achse in jedem Fall bestimmt werden muß und es letztendlich egal ist, ob die Ursache in der Ringkernstruktur oder in der mechanischen Fertigung des Spulensystems zu suchen ist. Die Abgleichbedingung bei einer Ringkerndrehung widerspricht nicht der Minimierung von Anregungsoberwellen, da auch hier eine symmetrische Anordnung der Inhomogenitätsstelle erwünscht ist. Die in den oben erwähnten Arbeiten diskutierte nichtlineare Querfeldabhängigkeit läßt sich hiermit jedoch nicht erklären.

2.5.2 Querfeldbeeinflussung durch Rückwirkung auf den Anregungsstrom

Der Durchbruchzeitpunkt des Anregungsstroms verändert sich mit zunehmendem äußeren Feld. Der Durchbruch erfolgt, wenn beide Ringkernsegmente die Sättigungsfeldstärke erreicht haben. Für den Sättigungsstrom im Ringkern gilt:

$$I_{Sat} = k H_{Sat} = \frac{1}{L} \int_{t_0}^{t_{Sat}} u dt; \text{ mit } L = \frac{\mu_r \mu_0}{2\pi} \frac{w^2 F}{r}$$

t_0	Zeitpunkt, an dem die Spannung angelegt wird
t_{Sat}	Zeitpunkt, an dem die Sättigungsfeldstärke erreicht wird
k	Spulenbeiwert der Anregungsspule
L	Induktivität der Anregungswicklung
w	Windungszahl der Anregungswicklung
F	Ringquerschnitt
r	Ringradius

Bei Annahme des Zuschaltens einer konstanten Anregungsspannung \hat{U} (unter Vernachlässigung der RC Kombination in der Anregungsschaltung) berechnet sich der Durchbruchzeitpunkt t_{Sat} im Nullfeld wie folgt:

$$t_{Sat} = k H_{Sat} \frac{\mu_r \mu_0 w^2 F}{\hat{U} 2\pi r}$$

Das vom Anregungsstrom erzeugte Feld ist dem externen Feld überlagert. Das externe Feld addiert sich in einem Ringkernsegment zu dem Anregungsfeld und subtrahiert sich in dem gegenüberliegenden Ringkernsegment vom Anregungsfeld. Die zur Sättigung des Materials notwendige Feldstärke wird in beiden Ringkernsegmenten zu unterschiedlichen Zeitpunkten erreicht. Bis zum Erreichen des Sättigungsfeldes im ersten Ringkernsegment ($H_{Err} < H_{Sat} - H_{Ext}$) sind beide Ringkernhälften ungesättigt. Für die Induktivität gilt die obige Formel. Das Erregerfeld $H_{Sat} - H_{Ext}$ wird zum Zeitpunkt t_1 erreicht.

$$t_1 = k (H_{Sat} - H_{Ext}) \frac{\mu_r \mu_0 w^2 F}{\hat{U} 2\pi r}$$

Im Bereich $H_{Sat} - H_{Ext} < H_{Err} < H_{Sat} + H_{Ext}$, ist ausschließlich das zweite Ringkernsegment gesättigt. Die Induktivität verringert sich auf ein Viertel, da die effektive Windungszahl

halbiert ist. Für das Zeitintervall vom Eintritt des ersten Kernsegment bis zum Eintritt des zweiten Kernsegmentes in die Sättigung (t_2) gilt:

$$t_2 - t_1 = k(2H_{Ext}) \frac{1}{4} \frac{\mu_r \mu_0 w^2 F}{\hat{U} 2\pi r}$$

Der Durchbruchzeitpunkt t_2 (vollständiger Eintritt des Ringkerns in die Sättigung) bei vorhandenem äußeren Feld ergibt sich wie folgt:

$$t_2 = k \left(H_{Sat} - \frac{1}{2} H_{Ext} \right) \frac{\mu_r \mu_0 w^2 F}{\hat{U} 2\pi r} \leq t_{sat}$$

Daraus leiten sich zwei Konsequenzen ab:

- Der Durchbruch erfolgt bei zunehmendem externen Feld früher als im Nullfeld.
- Die Amplitude der Anregungsspitzen wird mit zunehmendem externen Feld geringer, da auf Grund der verkürzten Aufladezeit des Parallelkondensators das Energiereservoir für den Durchbruchstrom kleiner geworden ist.

Abbildung 2-20 zeigt die Abhängigkeit des Anregungsstromes vom Querfeld. Mit zunehmendem Querfeld (getestet bis zum 10-fachen Erdfeld) verschiebt sich der Durchbruchzeitpunkt nach links und die Amplitude des Anregungsimpulses nimmt ab.

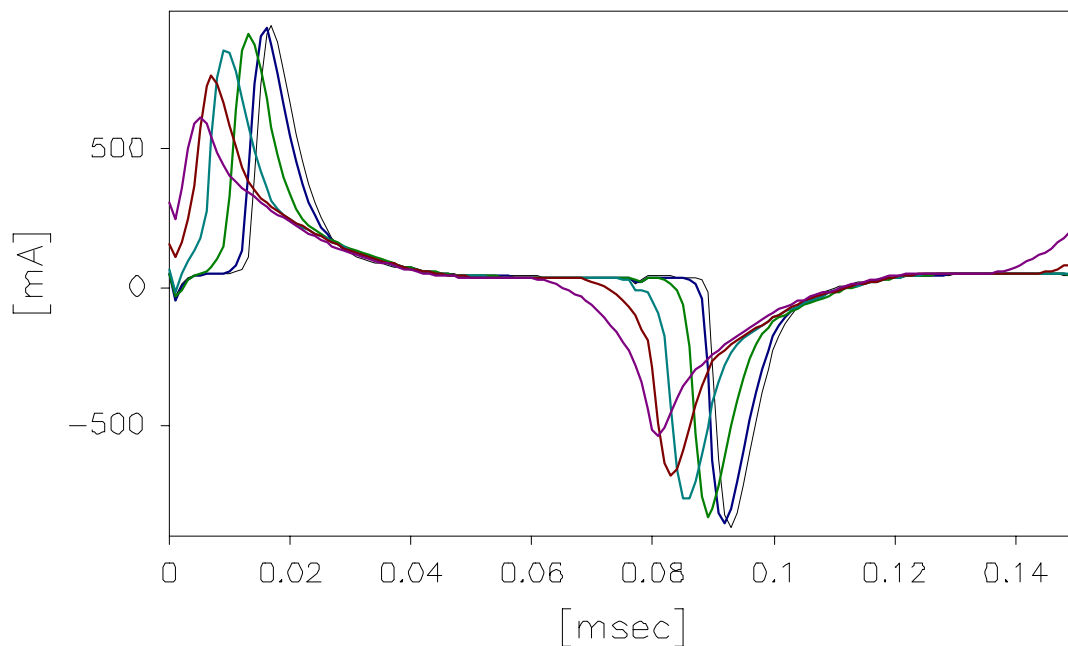


Abbildung 2-20: Anregungsstrom in Abhängigkeit des äußeren Feldes

Der Gehalt an zweiter Harmonischer im Anregungsstrom wird wiederum erst bei der Existenz einer Inhomogenität des Ringkernes erzeugt. Ist der magnetische Fluß unterschiedlich in den gegenüberliegenden Ringkernsegmenten, ergibt sich für den den kompletten Kern durchfließenden Anregungsstrom ebenfalls ein auf der Hysterese verschobener Arbeitspunkt. Der Durchbruch des Anregungsstroms erfolgt somit einseitig früher in der summarisch mehr angesteuerten Richtung.

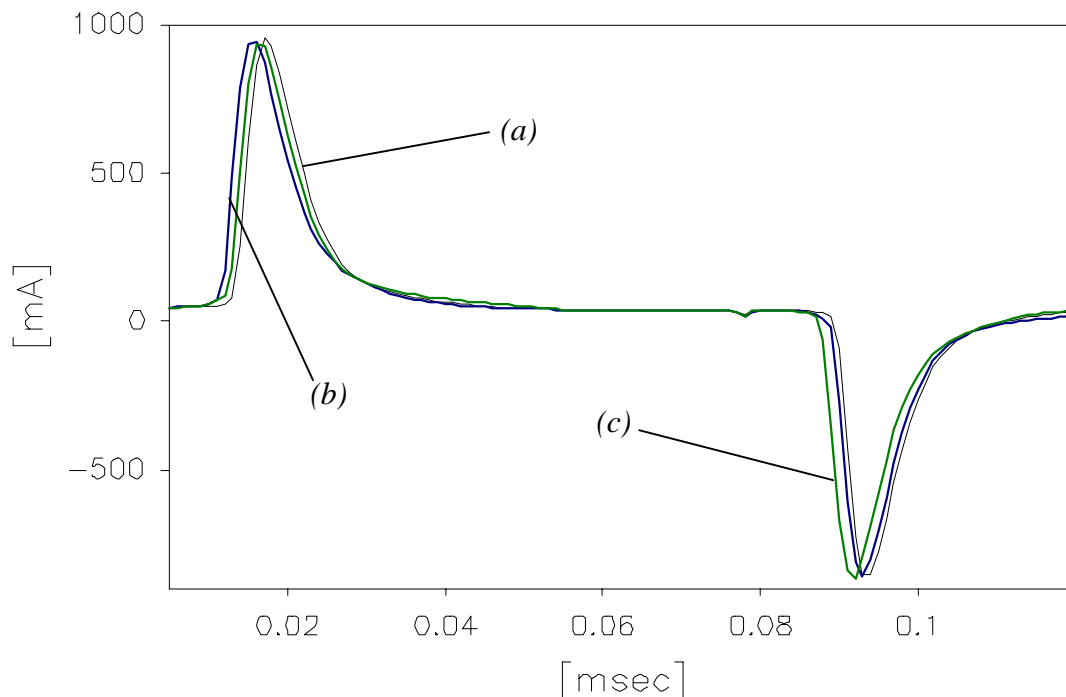


Abbildung 2-21: Anregungsstrom (mit Inhomogenität im felddurchströmten Ringkernsegment), wenn sich der Ringkern im Nullfeld (Kurve a), im $+80.000\text{ nT}$ Feld (b) und im -80.000 nT Feld (c) befindet.

Abbildung 2-21 zeigt den Anregungsstrom im Nullfeld (rechte Kurve) sowie den Strom mit einem in der Ringkernebene ausgesteuert Feld von $\pm 80.000\text{ nT}$ (wechselseitig nach links verschoben). Die Inhomogenität des Ringkernes liegt in einem der vom Querfeld durchströmten Segmenten. Man sieht, wie in Abhängigkeit von der Feldrichtung entweder der positive Durchbruch des Anregungsfeldes oder der negative Durchbruch um $2\mu\text{s}$ früher einsetzt. Der Gehalt an zweiter Oberwelle in der Anregung wird getragen durch die versetzten Anregungsspitzen.

Die Induktivität des Ringkernes und die durch die Asymmetrie erzeugte zweite Harmonische sind in der folgenden Tabelle für Felder bis zu $200\mu\text{T}$ eingetragen.

B(μT)	0	40	80	120	160	200
L(μH)	4,23	4,17	4,01	3,76	3,48	3,17
$2f_0(\text{dB})$	-85	-61	-56	-54	-53	-53
$2f_0(\text{mV})$	0,05	0,89	1,58	2,00	2,24	2,24

Die Werte in der Tabelle zeigen, daß die durch das Querfeld im Anregungsstrom erzeugte zweite Oberwelle keineswegs proportional dem Querfeld ist. Sie wird durch die Asymmetrie der Anregungswicklung direkt in die Sekundärwicklung transformiert. Die Phasenlage ist gebunden an den Anregungsstrom. Transformiert in das Sekundärsignal liegt das Maximum der querfeldtragenden zweiten Harmonischen im Nulldurchgang der Grundwelle des Anregungsstromes. Die Phasenlage der feldproportionalen zweiten Harmonischen liegt auf Grund der Hysterese des magnetischen Materials nicht in Phase mit der Anregung, so daß der

Phasenwinkel zwischen querfeldabhängiger und meßfeldabhängiger Harmonischer ungleich 90° ist. Die Konsequenz ist eine Querfeldabhängigkeit. Nach obiger Messung ist diese Abhängigkeit nichtlinear.

Der experimentelle Beweis kann über den in Abschnitt 2.1.3 beschriebenen Versuchsaufbau erbracht werden (Abb. 2-8). Setzt man den in Reihe geschalteten Ringkern einem Querfeld aus, muß zusätzlich eine zweite Harmonische induziert werden. Analog zur Messung des Fluxgate Signals kann man Amplitude und Phase der durch die Anregung transformierten querfeldabhängigen zweiten Harmonischen ermitteln. Ein Versuch bestätigt diese Annahme. Obwohl der Sensor keinen Kern mit weichmagnetischem Material enthält, kann man durch die Drehung des in Reihe geschalteten zweiten Kerns im Erdfeld eine feldabhängige zweite Harmonische in der Sekundärspule erzeugen. Die Empfindlichkeit liegt bei einem Tausendstel der nominalen Empfindlichkeit. Die Phase ist um 30° zur zweiten Harmonischen des Fluxgate Signals verschoben.

Um einen nichtlinearen Querfeldeffekt zu erzielen, müssen demnach gleichzeitig drei Fehlerzustände vorliegen:

- Der Ringkern muß eine Inhomogenitätsstelle in einer dem Querfeld ausgesetzten Region haben.
- Der Anregungsstrom muß von der Permeabilität des Ringkernmaterials abhängig sein.
- Die Anregungswicklung muß asymmetrisch bezüglich der Sekundärwicklung sein.

3 Parametrisierung von Magnetometerfehlern und Relativbewegung

Die Übertragungsfunktion von gemessenem Feld (\mathbf{B}_M) zu äußerem Feld (\mathbf{B}) kann in zwei Koordinatentransformationen aufgespalten werden. Der Meßwert wird erst in ein orthogonales Sensorsystem und anschließend in das Referenzsystem des äußeren Feldes transformiert. In die Transformation des Meßwertes in das Sensorsystem gehen die Magnetometerfehler ein. Die Transformation zwischen dem Referenz- und dem Sensorkoordinatensystem wird durch die Rotationsmatrix \mathbf{R} beschrieben. Die Rotationsmatrix soll zeitabhängig sein und somit die Relativbewegung des Sensors widerspiegeln. Es gilt:

$$\mathbf{R} \mathbf{B} = f(\mathbf{B}_M, \text{Magnetometerfehler})$$

Das äußere Feld \mathbf{B} ist durch die Komponenten $\{B_x, B_y, B_z\}$ im Referenzkoordinatensystem definiert. Das Produkt von Rotationsmatrix \mathbf{R} und Feld \mathbf{B} ergibt den Feldvektor \mathbf{B}_R mit den Komponenten $\{B_{Rx}, B_{Ry}, B_{Rz}\}$ im orthogonalen Sensorsystem. Das gemessene Feld \mathbf{B}_M mit den Komponenten $\{B_{Mx}, B_{My}, B_{Mz}\}$ ist an die reale, nichtorthogonale Sensorgeometrie gebunden.

Im Folgenden sollen Sensorbewegung und Magnetometerfehler parametrisiert werden.

3.1 Parametrisierung der Relativbewegung Sensor - Magnetfeld

Die Relativbewegung Sensor-Magnetfeld wird innerhalb der Übertragungsfunktion durch die Rotationsmatrix \mathbf{R} beschrieben. Die Transformation erfolgt aus dem Referenzsystem $\{B_x, B_y, B_z\}$ in das bewegte System $\{B_{Rx}, B_{Ry}, B_{Rz}\}$. Da es sich um eine Bewegung in einem homogenen Feld handelt, kann der räumliche Versatz von Einzelsensoren vernachlässigt werden.

Uneingeschränkte Bewegungsfreiheit:

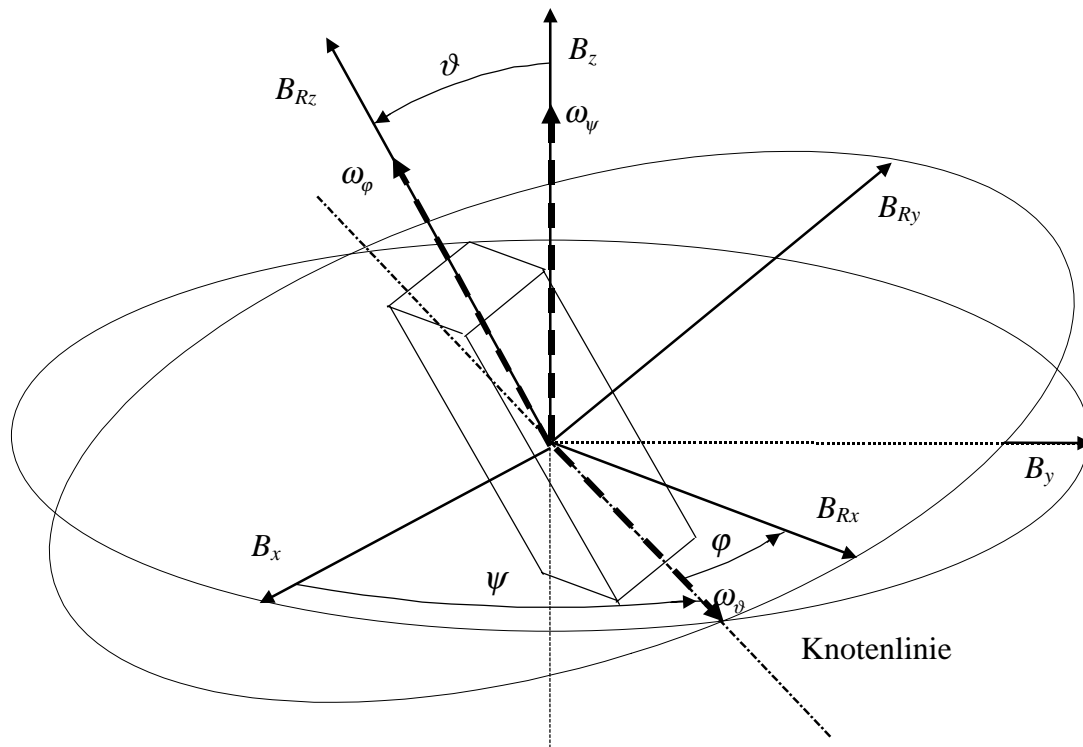
Die Drehung muß unabhängig in drei Richtung erfolgen und sollte an die beschleunigungsfreie Bewegung von Satelliten anpaßbar sein. Aus diesen Gründen wird eine Koordinatendrehung um die drei Eulerschen Winkel als Bewegung gewählt. Die Koordinatentransformation wird durch den Nutationswinkel (zwischen den positiven Richtungen der B_z und B_{Rz} -Achse), den Präzessionswinkel (zwischen der B_x -Achse und der Schnittgeraden der $B_x B_y$ und $B_{Rx} B_{Ry}$ Ebenen) und durch den Winkel der reinen Drehung (zwischen der Schnittgeraden der $B_x B_y$ und $B_{Rx} B_{Ry}$ Ebenen und der B_{Rx} -Achse) beschrieben. Für die drei Winkel gilt:

$$\varphi = \omega_\varphi t ; \psi = \omega_\psi t ; \vartheta = \omega_\vartheta t$$

Die Winkelgeschwindigkeiten $\omega_\varphi, \omega_\psi, \omega_\vartheta$ sollen voneinander unabhängig sein.

Berechnet man die Komponenten des im raumfesten System gegebenen Magnetfeldes im Sensorsystem, muß die folgende Transformation durchgeführt werden:

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \vartheta & \cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \cos \vartheta & \sin \varphi \sin \vartheta \\ -\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi \cos \vartheta & -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \vartheta & \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \psi \sin \vartheta & -\cos \psi \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{Rx} \\ B_{Ry} \\ B_{Rz} \end{pmatrix}$$



Raumfestes System $\{B_x, B_y, B_z\}$

- Referenzsystem (Magnetfeld)

Körperfestes System $\{B_{Rx}, B_{Ry}, B_{Rz}\}$

- rotierendes System (Satellit oder Sensor)

Abbildung 3-1: Rotation um die drei Eulerschen Winkel

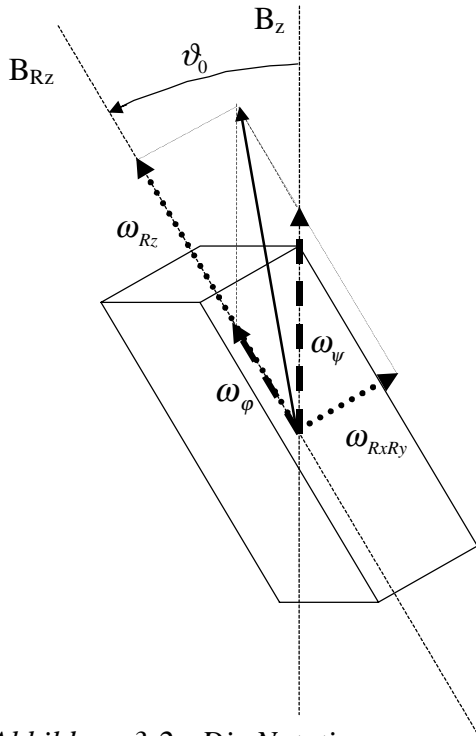
Neben dem allgemeinen Fall sollen zwei Sonderfälle betrachtet werden, in denen die Bewegungsfreiheit eingeschränkt wird. Die Einschränkungen werden so gewählt, daß die bei Satelliten auftretenden Bewegungen (Rotation, Nutation) erfaßt werden.

Eingeschränkte Bewegungsfreiheit

Nutation:

Voraussetzung für eine Nutation ist, daß die Trägheitsmomente senkrecht zur Rotationsachse gleich sind ($A=B$). So betragen zum Beispiel bei Equator-S die Hauptträgheitsmomente senkrecht zur Rotationsachse $A = B = 35 \text{ kgm}^2$ und das Trägheitsmoment in Rotationsachsenrichtung bei ausgeklappten Booms $C = 55 \text{ kgm}^2$.

Im körperfesten System vereinfachen sich für $M_{Rx}=M_{Ry}=M_{Rz}=0$ (Kräftefreiheit) und $A=B$ die Eulerschen Gleichungen wie folgt:



$$0 = A \dot{\omega}_{Rx} - (A - C) \omega_{Ry} \omega_{Rz}$$

$$0 = A \dot{\omega}_{Ry} - (A - C) \omega_{Rx} \omega_{Rz}$$

$$0 = C \dot{\omega}_{Rz}$$

Aus der dritten Gleichung folgt, daß ω_{Rz} und folglich auch $\omega_{RxRy} = \sqrt{\omega_{Rx}^2 + \omega_{Ry}^2}$ konstant sein müssen. Wird die Winkelgeschwindigkeit in eine zu B_z (ω_ψ) und eine zu B_{Rz} parallele Komponente (ω_ϕ) aufgeteilt, ist $\omega_\phi = 0$. Die Bewegung wird ausschließlich durch die Rotationsgeschwindigkeiten ω_ϕ (Winkelgeschwindigkeit der Drehung um die Figuren-achse), die Nutationsgeschwindigkeit ω_ψ (Winkelgeschwindigkeit der Drehung der Figuren-achse um die Symmetrieachse - Nutationskegel) und dem Winkel ϑ zwischen den Geschwindigkeiten beschrieben.

Abbildung 3-2: Die Nutation

Aus der Lösung der Eulerschen Gleichung [Grammel 1920] ergeben sich für die Winkelgeschwindigkeiten im nutierenden System folgende Beziehungen:

$$\omega_\phi = \dot{\phi} = \frac{A - C}{A} \omega_z$$

$$\omega_\psi = \dot{\psi} = \frac{C}{A \cos \vartheta} \omega_z$$

Die Winkelgeschwindigkeiten ω_ϕ und ω_ψ sind nicht mehr unabhängig voneinander. Sie sind wie folgt über den Nutationswinkel miteinander verbunden.

$$C \omega_\phi = (A - C) \omega_\psi \cos \vartheta$$

Bei einer gegebenen Masseverteilung im Satelliten und einer festgelegten Rotationsfrequenz gehört zu jedem Öffnungswinkel eine feste Nutationsfrequenz. Die Größe des Öffnungswinkels und somit auch die Frequenz der Nutation hängt von den Anfangsbedingungen ab. Für die Ausnutzung der Satellitenbewegung zur Kalibrierung ist die Abhängigkeit nicht störend, so lange die Rotationsgeschwindigkeit kein ganzes Vielfaches der Nutationsgeschwindigkeit ist. Somit geht nur eine unabhängige Bewegung ($\omega_\phi = 0$) mit der Eingrenzung der Bewegung auf einen kräftefreien symmetrischen Kreisel verloren. Zwei Winkelgeschwindigkeiten bleiben der Analyse erhalten. Für die Transformationswinkel gilt:

$$\vartheta = \vartheta_0 ; \quad \psi = \omega_\psi t ; \quad \phi = \omega_\phi t$$

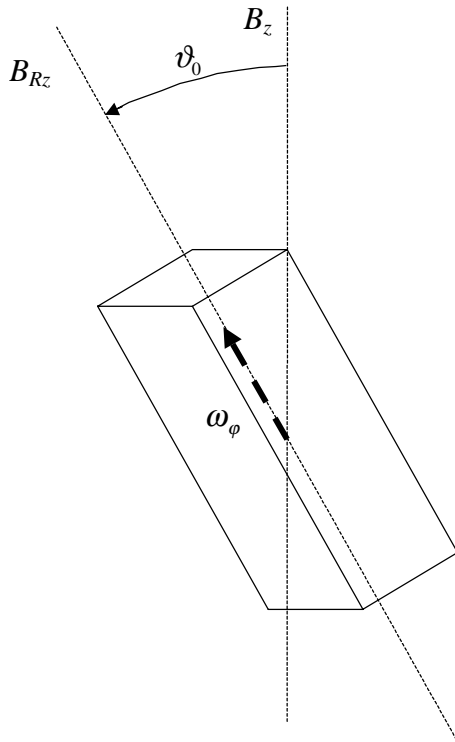
ϑ und ψ beschreiben die Figurenachse des Kreisels, die sich mit der Geschwindigkeit ω_ψ um den Öffnungswinkel ϑ_0 bewegt. φ beschreibt die Rotation um die Figurenachse.

Bei der Transformation der Magnetfeldkomponenten aus dem Referenzsystem in das Sensorsystem wird die Drehung um ϑ durch den konstanten Winkel ϑ_0 ersetzt:

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \vartheta_0 & \cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \cos \vartheta_0 & \sin \varphi \sin \vartheta_0 \\ -\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi \cos \vartheta_0 & -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \vartheta_0 & \cos \varphi \sin \vartheta_0 \\ \sin \psi \sin \vartheta_0 & -\cos \psi \sin \vartheta_0 & \cos \vartheta_0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{Rx} \\ B_{Ry} \\ B_{Rz} \end{pmatrix}$$

Rotation

Ist auch die Nutationsgeschwindigkeit gleich Null, wird die Bewegung auf eine einfache Rotation reduziert.



Die Rotationsgeschwindigkeit fällt mit der Winkelgeschwindigkeit in B_{Rz} -Richtung zusammen:

$$\dot{\varphi} = \omega_\varphi; \dot{\psi} = 0$$

Für die Eulerschen Winkel gilt:

$$\vartheta = \vartheta_0; \psi = 0; \varphi = \omega_\varphi t$$

Der Satellit führt eine Rotation um die B_z -Achse mit ω_φ aus. Die Rotationsachse ist um ϑ_0 geneigt.

Ist $\vartheta_0 = 0$, fallen die Z-Achsen von Satellit und Bezugssystem aufeinander:

$$\vartheta = 0; \psi = 0; \varphi = \omega_\varphi t$$

Es handelt sich nun um das in der Einleitung beschriebene Beispiel.

Abbildung 3-3: Die Rotation

Die Transformationsmatrizen vereinfachen sich für die einfache Rotation wie folgt:

$$\text{für } \vartheta = \vartheta_0 \quad \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \cos \vartheta_0 & \sin \varphi \sin \vartheta_0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \cos \vartheta_0 & \cos \varphi \sin \vartheta_0 \\ 0 & -\sin \vartheta_0 & \cos \vartheta_0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{Rx} \\ B_{Ry} \\ B_{Rz} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.}$$

$$\text{für } \vartheta = 0 \quad \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{Rx} \\ B_{Ry} \\ B_{Rz} \end{pmatrix}$$

3.2 Parametrisierung der Magnetometerfehler

Laut den Abschnitten 2.1 bis 2.3 sind die im Entstehungsprozess der zweiten Harmonischen erzeugten Fehler sowohl konstanter als auch feldabhängiger Natur. Der konstante Anteil an zweiter Harmonischer wird nach der phasenempfindlichen Gleichrichtung in einen Nullpunkt gewandelt. Der feldabhängige Anteil geht in die Leerlaufverstärkung ein. Wie in Abschnitt 2.4. beschrieben, spielt in einem gegengekoppelten System die Leerlaufverstärkung eine untergeordnete Rolle. Die Stabilität der Gesamtverstärkung (Skalenwert) wird durch die Gegenkopplung (Gegenkopplungsstrom + Spuleneigenschaften) bestimmt. Die magnetischen Achsen der Komponenten werden in Abhängigkeit der Art der Gegenkopplung von der Sensorachse (Sekundärspule + Kern) oder vom Gegenkopplungsspulensystem bestimmt. Nichtlineare Einflüsse können vernachlässigt werden, da sie entweder durch die Gegenkopplung linearisiert werden oder da es sich wie im Fall der Quersfeldempfindlichkeit (Abschnitt 2.5.) um vermeidbare Fehler handelt. Somit können die Magnetometerfehler in folgende drei Fehlergruppen zusammengefaßt werden:

- Nullpunkte \mathbf{N}_P (auch Offsets genannt),
- Skalenwerte \mathbf{S}_P (Empfindlichkeit in Achsenrichtung) und
- Orthogonalitätsabweichung \mathbf{O}_P

Die lineare Übertragungsfunktion vom Meßwert \mathbf{B}_M zum Magnetfeld \mathbf{B}_R im orthogonalen Sensorsystem ergibt sich wie folgt:

$$\mathbf{O}_P * \mathbf{S}_P * (\mathbf{B}_M - \mathbf{N}_P) = \mathbf{B}_R$$

Die Nullpunkte sind in Richtung der Magnetometerachsen ausgerichtet und haben die gleiche Einheit wie \mathbf{B}_M (zum Beispiel Volt, digitale Einheiten oder vorläufige Nanotesla). Die Komponenten werden mittels einer Diagonalmatrix (Skalenwertmatrix) in Nanotesla umgewandelt. Die Orthogonalitätsmatrix transformiert das nicht orthogonale Sensorsystem in das Referenzsystem. Es wird angenommen, daß die X-Achse des Sensors in die X-Richtung des Referenzsystems und die Y-Achse in die XY-Ebene des Referenzsystems zeigt. Somit reduziert sich die Orthogonalitätsmatrix auf eine Dreiecksmatrix.

Befindet sich der Sensor im Nullfeld, so ist die Abweichung der Ausgangsspannung von Null gleich dem Nullpunkt. Hieraus entsteht eine Spaltenmatrix für die Nullpunkte:

N_x ist der Nullpunkt der X-Komponente

N_y ist der Nullpunkt der Y-Komponente

N_z ist der Nullpunkt der Z-Komponente

Die Felder werden mit dem komponentenabhängigen Verstärkungsfaktor multipliziert.

Hieraus entsteht eine Diagonalmatrix für die Skalenwerte mit folgenden Faktoren:

S_x ist der Skalenwert der X-Komponente

S_y ist der Skalenwert der Y-Komponente

S_z ist der Skalenwert der Z-Komponente

Die Orthogonalitätsabweichung zwischen zwei Achsen ist mit dem Winkel α_{ij} festgelegt. Aufgrund der Abweichung von der Orthogonalität mißt die Y-Achse des Sensors Anteile des in X-Richtung angelegten Feldes und die Z-Achse des Sensors Anteile der in X- und Y-

Richtung angelegten Felder. Hieraus entsteht eine Dreiecksmatrix für die Orthogonalitätsabweichung mit folgenden Winkeln:

α_{xy} ist der Winkel zwischen der Y-Achse des Magnetometers und der Y-Achse des Referenzsystems in Richtung der X-Achse

α_{xz} ist der Winkel zwischen der Projektion der Z-Achse des Magnetometers auf die XZ-Ebene des Referenz Systems und der Z-Achse des Referenz Systems in Richtung der X-Achse

α_{yz} ist der Winkel zwischen der Projektion der Z-Achse des Magnetometers auf die YZ-Ebene des Referenz Systems und der Z-Achse des Referenz Systems in Richtung der Y-Achse

Es ergibt sich die folgende Übertragungsfunktion in Komponentenschreibweise:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha_{xy} & 1 & 0 \\ -\sin \alpha_{xz} & -\sin \alpha_{yz} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_{xy} S_y & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha_{xz} \cos \alpha_{yz} S_z \end{pmatrix} * \left(\begin{pmatrix} B_{Mx} \\ B_{My} \\ B_{Mz} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} B_{Rx} \\ B_{Ry} \\ B_{Rz} \end{pmatrix}$$

Nimmt man in Analogie zur oben definierten Übertragungsfunktion an Stelle der physikalischen Fehler numerische Fehler (Index "N") an, gilt:

$$\mathbf{O}_N * \mathbf{S}_N * (\mathbf{B}_M - \mathbf{N}_N) = \mathbf{R} * \mathbf{B}_N = \mathbf{B}_{RN}$$

Die berechneten Vektoren \mathbf{B}_N im Referenzsystem sowie \mathbf{B}_{RN} im Sensorsystem ergeben sich aus dem mit numerischen Fehlergrößen beaufschlagten Meßwert \mathbf{B}_M . Setzt man die nach \mathbf{B}_M umgeformte Übertragungsfunktion in diese Gleichung ein, ergibt sich folgender Ausdruck für \mathbf{B}_{RN} :

$$\mathbf{O}_N \mathbf{O}_P^{-1} * \mathbf{S}_N \mathbf{S}_P^{-1} * \mathbf{R} * \mathbf{B} + \mathbf{O}_N \mathbf{S}_N (\mathbf{N}_P - \mathbf{N}_N) = \mathbf{B}_{RN}$$

Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden die Produkte bzw. Differenzen aus realen und angenommenen Fehlern durch "Fehlerabweichungen" wie folgt substituiert:

$$\mathbf{O}_N \mathbf{O}_P^{-1} = \mathbf{O}; \quad \mathbf{S}_N \mathbf{S}_P^{-1} = \mathbf{S} \mathbf{k}; \quad \mathbf{O}_N \mathbf{S}_N (\mathbf{N}_P - \mathbf{N}_N) = \mathbf{N}$$

Die Gleichung vereinfacht sich wie folgt:

$$\mathbf{O} * \mathbf{S} \mathbf{k} * \mathbf{R} * \mathbf{B} + \mathbf{N} = \mathbf{B}_{RN}$$

Der Magnetfeldvektor \mathbf{B}_{RN} ist vom äußeren Feld, der Bewegung sowie von den realen und angenommenen Fehlern abhängig. Stimmen reale und angenommene Fehler überein (\mathbf{O} und $\mathbf{S} \mathbf{k}$ Einheitsmatrizen, $\mathbf{N} = 0$), ist der Feldvektor \mathbf{B}_{RN} gleich dem Magnetfeld \mathbf{B}_R im Sensorsystem.

4 Analytische Untersuchung des aus fehlerbehafteten Komponenten berechneten Magnetfeldbetrages

4.1 Strategie der analytischen Untersuchung

Laut Abschnitt 3 kann das berechnete Feld (\mathbf{B}_{RN}) wie folgt als Funktion des externen Feldes (\mathbf{B}), der Sensorausrichtung (\mathbf{R}) und der Abweichung von realen und angenommenen Fehlern dargestellt werden:

$$\mathbf{B}_{RN} = \mathbf{O} * \mathbf{S}_k * \mathbf{R} * \mathbf{B} + \mathbf{N}$$

Bei der hier zu behandelnden Kalibrierung mittels Relativbewegungen zwischen Sensor und Magnetfeld wird das Feld \mathbf{B} als konstant (bekannt oder unbekannt) und die Sensorausrichtung \mathbf{R} als variabel angenommen. An Hand der Analyse von \mathbf{B}_{RN} sollen Aussagen über die Fehlergruppen (\mathbf{N} , \mathbf{S} und \mathbf{O}) gemacht werden.

Es gibt zahlreiche Beispiele, bei denen die Änderung der Sensorausrichtung zur Bestimmung der Magnetometerfehler ausgenutzt wird. Es sind meist Sonderfälle, in denen für eingeschränkte Bewegungsfreiheiten oder für eingeschränkte Fehlergruppen Algorithmen zur Berechnung der Fehler angegeben werden. Beispiele dafür findet man u.a. in Veröffentlichungen zur Kalibrierung von Magnetometern [Afanasev 1986] oder in Veröffentlichungen, die die Bestimmung der Mißweisung des Kompasses in der Schifffahrt ([Fanslau 1960],[Auster 1961]) behandeln. In allen Beispielen ist die exakte Beschreibung der Bewegung (Navigation, Kreisel, exakte 180°-Drehung usw.) notwendige Voraussetzung für die explizite Berechnung der Meßfehler. Ebenfalls in allen Beispielen werden die Komponenten des Meßwertes mit den Komponenten des externen Feldes verglichen. Kalibrierverfahren, die auf dem direkten Vergleich von \mathbf{B}_R und \mathbf{B}_{RN} beruhen, erfordern auf Grund der notwendigen Kenntnis von äußerem Feld und Bewegung aufwendige Meßeinrichtungen. In dem Bemühen, die Anforderungen an die Meßeinrichtungen zu minimieren, werden Kalibrierverfahren gesucht, die mit reduzierten Annahmen an \mathbf{B} und \mathbf{R} ausreichend Eichgleichungen liefern, um die Magnetometerfehler zu bestimmen (siehe folgende Tabelle).

Forderung für \mathbf{B}_{RN} - Quelle der Eichgleichungen	Annahmen an \mathbf{B} und \mathbf{R} - Anforderungen an Meßeinrichtungen	Bemerkungen
$\mathbf{B}_{RN} = \mathbf{B}_R$	\mathbf{B} - bekannt \mathbf{R} - bekannt	allgemeine Kalibrierung
$ \mathbf{B}_{RN} = \mathbf{B}_R $	$ \mathbf{B} $ - bekannt \mathbf{R} - unbekannt	skalare Kalibrierung
$d \mathbf{B}_{RN} /dt = d \mathbf{B}_R /dt = 0$	\mathbf{B} - unbekannt aber konstant \mathbf{R} - unbekannt	
$Cor[\mathbf{B}_{RN}; \mathbf{R}] = 0$	\mathbf{B} - unbekannt \mathbf{R} - unbekannt	

Die Schattierung in der dritten Zeile der Tabelle kennzeichnet den Bereich, mit dem sich diese Arbeit beschäftigt. Es werden nicht die Komponenten, sondern der als konstant angenommene Betrag des Magnetfeldes analysiert. Ist der Betrag bekannt, geht die hier diskutierte Methode in einen Spezialfall der skalaren Kalibriermethode (Zeile 2) über. Die Analyse der Korrelation von Bewegung und berechnetem Betrag (Zeile 4) läßt zusätzlich einen Variation des äußeren Feldes zu. Diese Erweiterung soll hier nicht diskutiert werden, da die Geschwindigkeit der zeitlichen Variation des Feldes als langsam im Vergleich zur aufgeprägten Bewegung angenommen werden kann.

Die Grundidee des hier vorgestellten Verfahrens beruht auf der Unabhängigkeit des Betrages vom Koordinatensystem. Der Betrag des Magnetfeldes im Sensorsystem $|\mathbf{B}_{RN}|$ berechnet sich wie folgt:

$$|\mathbf{B}_{RN}|^2 = [\mathbf{O} * \mathbf{S}_k * \mathbf{R} * \mathbf{B} + \mathbf{N}]^T [\mathbf{O} * \mathbf{S}_k * \mathbf{R} * \mathbf{B} + \mathbf{N}]$$

Weiterhin gilt: $|\mathbf{B}_{RN}|^2 = [\mathbf{R} * \mathbf{B}_N]^T [\mathbf{R} * \mathbf{B}_N] = \mathbf{B}_N^T * \mathbf{R}^{-1} * \mathbf{R} * \mathbf{B}_N = |\mathbf{B}_N|^2$

$$|\mathbf{B}_{RN}|^2 = |\mathbf{B}_N|^2 = |\mathbf{B}_R|^2 = |\mathbf{B}|^2 \quad \text{für } \mathbf{O}, \mathbf{S}_k = \text{Einheitsmatrizen}, \mathbf{N} = 0$$

Ist die Abweichung zwischen realem und angenommenem Fehler gleich Null, stimmt der berechnete Betrag mit dem wahren Betrag des äußeren Feldes überein. Fordert man die Übereinstimmung von berechnetem und wahren Betrag, ist, unabhängig von der Art der Bewegung, in jedem Fall der Koordinatenursprung des Fehlerraums Teil der Lösungsmenge. In der Arbeit wird nachgewiesen, daß unter bestimmten Voraussetzungen an Feld und Bewegung der Koordinatenursprung die einzige Lösung ist. In diesem Fall ist eine Bewegung des Sensors hinreichende Bedingung für die Bestimmung der Fehlerabweichungen. Die exakte Beschreibung der Bewegung ist nicht notwendig.

Setzt man die erste Ableitung des Betrages nach der Bewegung gleich Null, erhält man ein System von Eichgleichungen, das die Wirkung der Fehler auf den berechneten Betrag beschreibt. Die Analyse dieser Ableitungen wird zeigen, daß die Auswirkungen der in den vorangegangenen Abschnitten definierten Meßfehler voneinander unabhängig sind. Damit ist die Voraussetzung für eine numerische Fehlerbestimmung gegeben und die Anwendbarkeit der Methode bewiesen. Die Analyse der Eichgleichungen wird weiterhin zeigen, daß Sonderfälle auftreten, bei denen eine Bestimmung der Fehlerparameter nicht möglich ist. Diese „auszuschließenden Bedingungen“ werden separat aufgeführt.

Um die Ableitung nach der Bewegung einfach zu halten, soll die Drehung um die Eulerschen Winkel mit konstanten Geschwindigkeiten erfolgen. Diese Annahme stellt keine Einschränkung der allgemeinen Gültigkeit dar. Kann der Beweis für die Unabhängigkeit der Fehlergruppen für eine Bewegung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit erbracht werden, so gilt sie erst recht für eine allgemeine (beschleunigte) Bewegung.

Beispiel:

An Hand eines einfachen Beispiels soll der Unterschied zwischen den Kalibrierverfahren verdeutlicht werden. Ein zweidimensionaler Sensor mit den Sensorachsen (X,Y) hat einen Nullpunktversatz in der X-Komponente. Skalenwerte und Orthogonalität sind nicht fehlerbehaftet ($\mathbf{O} = \mathbf{S}\mathbf{k} = 1$). Die Sensorebene liegt senkrecht zur Rotationsachse. Somit gilt:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix}; \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B}_M = \begin{pmatrix} B_{Mx} \\ B_{My} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{N}_P = \begin{pmatrix} N_{Px} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{N}_N = \begin{pmatrix} N_{Nx} \\ 0 \end{pmatrix}$$

- 1.) Die Berechnung des Nullpunktes nach dem Standardkalibrierverfahren [Ness et al. 1971],[Afanasev 1986] erfolgt mit Hilfe von zwei Messungen ($\alpha^{(1)}$ und $\alpha^{(2)}$).

$$\text{Allgemein gilt: } (\mathbf{B}_M - \mathbf{N}_P) = \mathbf{R} * \mathbf{B}$$

Man erhält zwei Gleichungen, mit denen man das äußere Feld eliminieren und den Nullpunkt direkt berechnen kann. Die Bewegung (der Winkel α) muß bekannt sein. Für den Nullpunkt gilt:

$$N_{Px} = \frac{B_{Mx}^{(1)} \cos \alpha^{(2)} - B_{Mx}^{(2)} \cos \alpha^{(1)}}{\cos \alpha^{(2)} - \cos \alpha^{(1)}} \quad \text{bzw. für } \begin{pmatrix} \alpha^{(1)} = 0^\circ \\ \alpha^{(2)} = 180^\circ \end{pmatrix} \text{ gilt } N_{Px} = \frac{B_{Mx}^{(1)} + B_{Mx}^{(2)}}{2}$$

- 2.) In der hier vorgeschlagenen Kalibriermethode ist der Winkel α eine kontinuierlich veränderliche Größe (Rotation des Sensors) und der Fehler N_{Px} wird durch eine numerische Laufvariable N_{Nx} kompensiert.

$$\text{Allgemein gilt: } |\mathbf{B}_N|^2 = [\mathbf{R} * \mathbf{B} + \mathbf{N}]^T [\mathbf{R} * \mathbf{B} + \mathbf{N}] \text{ mit } \mathbf{N} = (\mathbf{N}_N - \mathbf{N}_P)$$

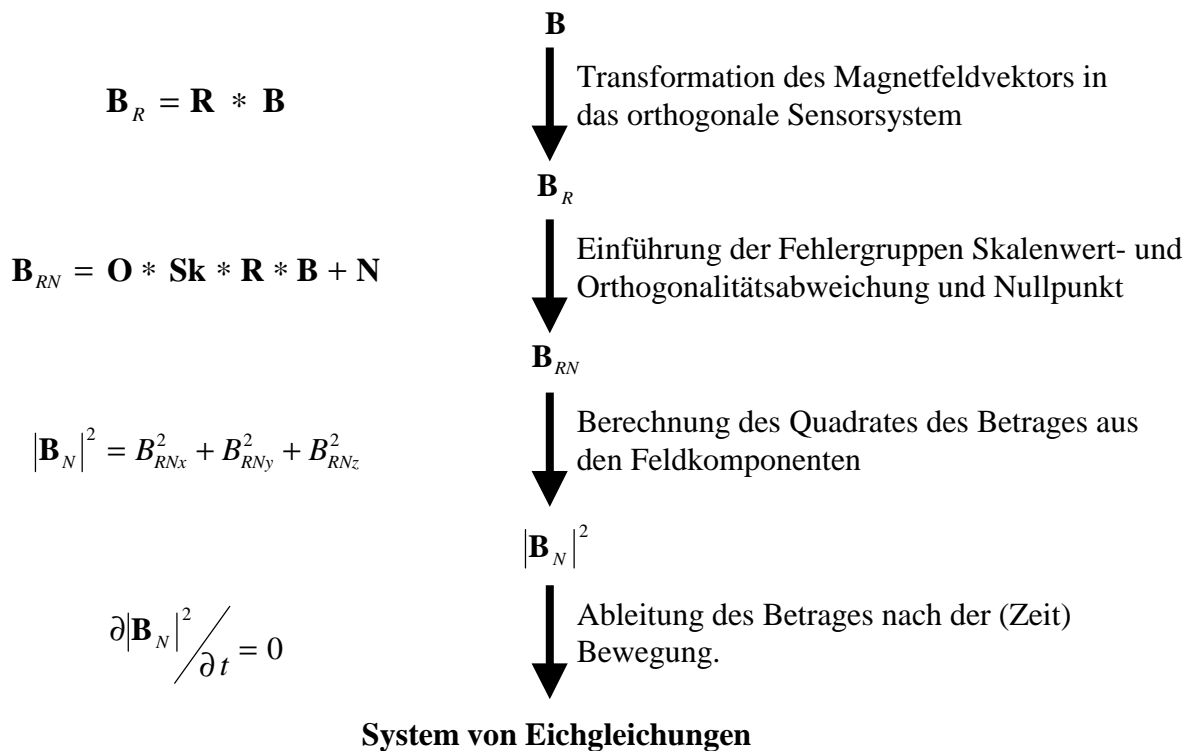
Die Ableitung des Magnetfeldbetrages im Sensorkoordinatensystem nach der Bewegung wird gleich Null gesetzt. Es ergibt sich folgende Eichgleichung, deren Erfüllung notwendiges Kriterium ist:

$$\partial |\mathbf{B}_R|^2 / \partial \alpha = 2(N_{Nx} - N_{Px})(-B_x \sin \alpha + B_y \cos \alpha) = 0$$

Im ersten Fall kann N_{Px} direkt berechnet werden. Man benötigt jedoch den Winkel α . Im zweiten Fall wird die Gleichung nur erfüllt, wenn einer der beiden Klammerausdrücke gleich Null ist. Es ergeben sich zwei Lösungen. Entweder die Laufvariable N_{Nx} ist gleich dem Nullpunkt N_{Px} ; In diesem Fall ist der Nullpunkt ermittelt. Oder aber sowohl B_x als auch B_y sind gleich Null; In diesem Fall handelt es sich um die auszuschließende Bedingung. Die Kenntnis des Winkels α ist nicht notwendig.

Allgemeine Vorgehensweise:

Die vollständige Analyse soll in folgender Reihenfolge durchgeführt werden:



Die Gleichungssysteme werden nacheinander für separat eingeführte Fehlergruppen (\mathbf{N} , \mathbf{Sk} und \mathbf{O}) diskutiert. Abschließend werden die Lösungsmengen der Fehlergruppen miteinander verglichen, um eine Aussage über die Unabhängigkeit von Lösungsmengen unterschiedlicher Fehlerquellen zu erhalten. Die Ableitung nach den Rotationswinkeln (φ , ψ und ϑ) erfolgt ebenfalls separat, da von unterschiedlichen Winkelgeschwindigkeiten ausgegangen werden kann.

Die Analyse wird zeigen, daß bei Variation aller Winkel (φ , ψ , und ϑ) genügend Bestimmungsgleichungen abgeleitet werden können, um alle Fehlergrößen eindeutig zu bestimmen. Es wird sich herausstellen, daß sogar die Variation von zwei Winkeln ausreicht.

Detaillierte Vorgehensweise:

- Simulation der Sensorbewegung durch Multiplikation des Magnetfeldvektors \mathbf{B} mit einer Rotationsmatrix \mathbf{R} .

Die Sensorbewegung in einem homogenen Feld ist identisch mit einem aus unterschiedlichen Richtungen einfallenden Feldvektor \mathbf{B} . Die Bewegung soll durch eine Drehung um die drei Eulerschen Winkel (φ , ψ , und ϑ) simuliert werden. Das im gedrehten System (Sensorsystem) gemessene Magnetfeld ist \mathbf{B}_R . Wie in Abschnitt 3 beschrieben, muß die folgende Koordinatentransformation durchgeführt werden:

$$\mathbf{B}_R = \mathbf{R} * \mathbf{B}$$

$$\begin{pmatrix} B_{Rx} \\ B_{Ry} \\ B_{Rz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \vartheta & \cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \cos \vartheta & \sin \varphi \sin \vartheta \\ -\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi \cos \vartheta & -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \vartheta & \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \psi \sin \vartheta & -\cos \psi \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$$

- Berechnung des Feldvektors \mathbf{B}_{RN} durch Verknüpfung des Magnetfeldes im Sensorsystem \mathbf{B}_R mit den Fehlergruppen Nullpunkt- (\mathbf{N}), Skalenwert- (\mathbf{Sk}) und Orthogonalitätsabweichung (\mathbf{O}).

$$\mathbf{B}_{RN} = \mathbf{O} * \mathbf{Sk} * \mathbf{R} * \mathbf{B} + \mathbf{N}$$

In Komponentenschreibweise:

$$\begin{pmatrix} B_{RNx} \\ B_{RNy} \\ B_{RNz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Sk_x & 0 & 0 \\ 0 & Sk_y & 0 \\ 0 & 0 & Sk_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ O_{xy} & 1 & 0 \\ O_{xz} & O_{yz} & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} B_{Rx} \\ B_{Ry} \\ B_{Rz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{pmatrix}$$

Die Fehler sollen in der Reihenfolge Nullpunkt, Skalenwert und Orthogonalität separat eingeführt und analysiert werden.

- Berechnung des Quadrates des Feldbetrages aus den fehlerbehafteten Komponenten.

$$|\mathbf{B}_N|^2 = |\mathbf{B}_{RN}|^2 = B_{RNx}^2 + B_{RNy}^2 + B_{RNz}^2$$

Da es für die Betrachtung der Abhängigkeit des Betrages von der Bewegung nicht von Bedeutung ist, ob der Betrag oder das Quadrat des Betrages analysiert wird, kann auf das Ziehen der Wurzel verzichtet werden.

- Ableitung des Betrages nach den Freiheitsgraden der Bewegung (φ , ψ , und ϑ).

Kriterium für die Fehlerfreiheit ist die Konstanz des aus den gemessenen Komponenten berechneten Betrages. Somit muß die zeitliche Ableitung des berechneten Betrages gleich Null sein.

$$\frac{\partial |\mathbf{B}_N|^2}{\partial t} = 0$$

Der Betrag ist eine Funktion der Eulerschen Winkel ($|\mathbf{B}_N|^2 = f(\varphi, \psi, \vartheta)$) und die Eulerschen Winkel sind eine Funktion der Zeit ($\varphi, \psi, \vartheta = f(t)$). Somit gilt:

$$\frac{\partial |\mathbf{B}_N|^2}{\partial t} = \frac{\partial |\mathbf{B}_N|^2}{\partial \varphi} * \frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial |\mathbf{B}_N|^2}{\partial \psi} * \frac{d\psi}{dt} + \frac{\partial |\mathbf{B}_N|^2}{\partial \vartheta} * \frac{d\vartheta}{dt} = 0$$

Die zeitliche Änderung der Eulerschen Winkel erfolgt mit konstanten Winkelgeschwindigkeiten ω_1 , ω_2 und ω_3 . Daraus folgt:

$$\omega_1 = \frac{d\varphi}{dt} ; \omega_2 = \frac{d\psi}{dt} ; \omega_3 = \frac{d\vartheta}{dt}$$

Mit Hilfe dieser Beziehung läßt sich die zeitliche Ableitung auf die partielle Ableitung nach den Winkeln zurückführen:

$$\frac{\partial |\mathbf{B}_N|^2}{\partial t} = \omega_1 \frac{\partial |\mathbf{B}_N|^2}{\partial \varphi} + \omega_2 \frac{\partial |\mathbf{B}_N|^2}{\partial \psi} + \omega_3 \frac{\partial |\mathbf{B}_N|^2}{\partial \vartheta} = 0$$

Nimmt man die Drehungen um die drei Eulerschen Winkel mit unterschiedlichen Winkelgeschwindigkeiten an, können die Ableitungen nach den Drehwinkeln spektral separiert und somit nacheinander Null gesetzt werden. Für die Fehlerfreiheit ergeben sich die folgenden drei Kriterien:

$$\frac{\partial |\mathbf{B}_N|^2}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial |\mathbf{B}_N|^2}{\partial \psi} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial |\mathbf{B}_N|^2}{\partial \vartheta} = 0.$$

- Interpretation des Gleichungssystems.

Die Eulerschen Winkel (φ , ψ , und ϑ) sind auf Grund der Quadrierung der Einzelkomponenten in den Eichgleichungen in Sinus- und Kosinus-Termen der einfachen und doppelten Rotationsfrequenz enthalten. Da eine gegenseitige Kompensation dieser spektralen Anteile unmöglich ist, muß jeder Anteil gleich Null sein. Jede Ableitung liefert somit vier Eichgleichungen. Insgesamt stehen 12 Eichgleichungen zur Verfügung.

Um die Fehler jeweils einer Fehlergruppe (Nullpunkte **N**, Skalenwerte **S** oder Orthogonalitätsabweichung **O**) zu bestimmen, sind drei, also insgesamt 9 Eichgleichungen, notwendig. Daraus folgt, daß die Fehler bestimmbar sind, wenn 9 der 12 Eichgleichungen voneinander unabhängig sind. Diese Unabhängigkeit wird im folgenden Abschnitt überprüft.

Für jede separat eingeführte Fehlergruppe werden die maximal 12 Eichgleichungen berechnet. Die Schnittmengen dieser Lösungen, getrennt nach Ableitungswinkel, werden bestimmt und die Lösungsmengen diskutiert. Die Frage nach der Unabhängigkeit der Lösungen für die einzelnen Fehlergruppen erfolgt über die Diskussion der Form der Lösungsmengen.

Wie in dem nachfolgenden Abschnitt im Detail gezeigt wird, haben die Eichgleichungen immer die allgemeine quadratische Form:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a = 0$$

Die Komponenten x , y und z des Vektors **u** stehen symbolisch für die Komponenten der Fehlervektoren **N**, **S** und **O**. Die Koeffizienten $a_{ij} = a_{ji}$ der symmetrischen Matrix **A**, die Komponenten a_i des Vektors **a** und der absolute Wert a enthalten die Feldrichtung und die Lage der Rotationsachse. In Matrizenschreibweise sieht die Gleichung wie folgt aus:

$$\mathbf{u} \mathbf{A} \mathbf{u}^T + 2 \mathbf{a} \mathbf{u}^T + a = 0 \quad (\mathbf{A} \text{ ist symmetrisch})$$

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + a = 0$$

Sind alle Koeffizienten der Matrix **A** gleich Null, ist die Lösungsmenge eine Ebenengleichung, die im Fall $a = 0$ durch den Koordinatenursprung geht.

Sind die Koeffizienten der Matrix **A** ungleich Null, handelt es sich bei der Lösung der Gleichung um eine Fläche zweiter Ordnung [Bronstein et al. 1960].

Wie sich in den folgenden Berechnungen zeigen wird, sind nicht alle Koeffizienten besetzt. Die Ausgangsgleichung vereinfacht sich wie folgt:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_1yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z = 0$$

in Vektorschreibweise:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_1 \\ 0 & a_1 & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Um die Flächen zu klassifizieren, sollen die Gleichungen in eine besser interpretierbare Form gebracht werden. Mit einer Verschiebung des Koordinatenursprungs in den Symmetriepunkt der Fläche sollen die linearen Glieder verschwinden. Durch die Substitution von **u** durch **u' + v** und durch die Lösung eines Gleichungssystems, in dem die Koeffizienten der linearen Anteile gleich Null gesetzt werden, ergibt sich der

folgende Verschiebungsvektor **v**:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -\frac{a_1}{a_{11}} & \frac{a_1a_3 - a_{33}a_2}{a_{22}a_{33} - a_1^2} & \frac{a_1a_2 - a_{22}a_3}{a_{22}a_{33} - a_1^2} \end{pmatrix}$$

Die transformierte Gleichung vereinfacht sich wie folgt:

$$\mathbf{u}'^T \mathbf{A} \mathbf{u}' + b_0 = 0$$

$$\begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_1 \\ 0 & a_1 & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} - \frac{a_1^2}{a_{11}} + \frac{a_{33}a_2^2 + a_{22}a_3^2 - 2a_1a_2a_3}{a_1^2 - a_{22}a_{33}} = 0$$

Bei der Verschiebung bleibt die Symmetrie der Matrix erhalten, so daß man mit einer Hauptachsentransformation (bei fest bleibenden Ursprung) die Matrix **A** in eine orthogonale Matrix **E** und in eine Diagonalmatrix **D** wie folgt aufgespalten kann:

$$\mathbf{A} = \mathbf{E} \mathbf{D} \mathbf{E}^T$$

Die Diagonalmatrix **D** enthält die Eigenwerte der Matrix **A**. Mit Hilfe der Eigenwerte kann die Fläche zweiter Ordnung klassifiziert werden.

Die orthogonale Matrix \mathbf{E} enthält als Spalten die normierten Eigenvektoren und beschreibt die Rotation des Koordinatensystems. Sie berechnet sich aus den Koeffizienten der Ausgangsgleichung wie folgt:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a_{22} - a_{33} - \sqrt{a_{22}^2 - 2a_{22}a_{33} + a_{33}^2 + 4a_1^2}}{\sqrt{4a_1^2 + (-a_{22} + a_{33} + \sqrt{a_{22}^2 - 2a_{22}a_{33} + a_{33}^2 + 4a_1^2})^2}} & \frac{a_{22} - a_{33} + \sqrt{a_{22}^2 - 2a_{22}a_{33} + a_{33}^2 + 4a_1^2}}{\sqrt{4a_1^2 + (-a_{22} + a_{33} - \sqrt{a_{22}^2 - 2a_{22}a_{33} + a_{33}^2 + 4a_1^2})^2}} \\ 0 & \frac{2a_1}{\sqrt{4a_1^2 + (-a_{22} + a_{33} + \sqrt{a_{22}^2 - 2a_{22}a_{33} + a_{33}^2 + 4a_1^2})^2}} & \frac{2a_1}{\sqrt{4a_1^2 + (-a_{22} + a_{33} - \sqrt{a_{22}^2 - 2a_{22}a_{33} + a_{33}^2 + 4a_1^2})^2}} \end{pmatrix}$$

Die zu interpretierende Gleichung hat jetzt folgende einfache Struktur:

$$\mathbf{u}'' \mathbf{D} \mathbf{u}''^T + b_0 = 0$$

$$(x'' \quad y'' \quad z'') \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} + b_0 = 0$$

Die Koeffizienten der Diagonalmatrix und der absolute Anteil berechnen sich wie folgt aus den Koeffizienten der Ausgangsgleichung:

$$\begin{aligned} d_{11} &= a_{11} \\ d_{22} &= \frac{1}{2} \left(a_{22} + a_{33} - \sqrt{a_{22}^2 - 2a_{22}a_{33} + a_{33}^2 + 4a_1^2} \right) \\ d_{33} &= \frac{1}{2} \left(a_{22} + a_{33} + \sqrt{a_{22}^2 - 2a_{22}a_{33} + a_{33}^2 + 4a_1^2} \right) \\ b_0 &= -\frac{a_1^2}{a_{11}} + \frac{a_{33}a_2^2 + a_{22}a_3^2 - 2a_1a_2a_3}{a_1^2 - a_{22}a_{33}} \end{aligned}$$

Vollständig wird die Lösung durch die Fläche zweiter Ordnung mit ihren charakteristischen Parametern d_{11} , d_{22} , d_{33} und b_0 , durch den Verschiebungsvektor \mathbf{v} und durch die Rotationsmatrix \mathbf{E} der normierten Eigenvektoren beschrieben. Die Diskussion soll sich aber auf die Flächen zweiter Ordnung (Ebene, Ellipsoid, Hyperboloid, Doppelkegel, Zylinder,...) beschränken. Unterscheiden sich die Flächen in ihrer Form voneinander, können die Lösungen nicht identisch sein. Somit sind unabhängige charakteristische Parameter der Flächen hinreichende Bedingung für die Unabhängigkeit von Lösungen. Auf die Interpretation des Verschiebungsvektors und der Eigenvektoren kann demzufolge verzichtet werden. Eine Schnittmenge der Flächen ist in jedem Fall gegeben, da für alle Lösungen der Nullpunkt im ursprünglichen Koordinatensystem Teil der Lösungsmenge ist. Kriterium für eine eindeutige Lösung ist, daß sich die Flächen genau im Nullpunkt des ursprünglichen Koordinatensystems (nicht verschoben und nicht gedreht) schneiden. Diese Analyse wird im weiteren Abschnitt detailliert durchgeführt.

Zusätzlich muß gefragt werden, unter welchen Feldbedingungen keine Lösung zustande kommt. Lösungen, die unabhängig von den eingeführten Fehlern sind, werden „auszuschließende Bedingungen“ genannt.

4.2 Der Einfluß der Nullpunkte

Betrachtet man ausschließlich den Nullpunkt als Fehlerquelle, können die Matrizen für Skalenwerte und Orthogonalität in der Hauptachse gleich Eins und in den nicht in der Hauptachse liegenden Matrixelementen gleich Null gesetzt werden.

$$\begin{pmatrix} B_{NRx} \\ B_{NRy} \\ B_{NRz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} B_{Rx} \\ B_{Ry} \\ B_{Rz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} B_{Rx} + N_x \\ B_{Ry} + N_y \\ B_{Rz} + N_z \end{pmatrix}$$

Das Quadrat des Betrages berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned} |\mathbf{B}_N|^2 &= |\mathbf{B}_R + \mathbf{N}|^2 \\ &= (B_{Rx} + N_x)^2 + (B_{Ry} + N_y)^2 + (B_{Rz} + N_z)^2 \end{aligned}$$

Ersetzt man das Magnetfeld \mathbf{B}_R im Sensorsystem durch das Produkt von Rotationsmatrix \mathbf{R} und Magnetfeld \mathbf{B} im ortsfesten Koordinatensystem, ergibt sich folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} |\mathbf{B}_N|^2 &= [(\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \vartheta)B_x + (\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \cos \vartheta)B_y + (\sin \varphi \sin \vartheta)B_z + N_x]^2 \\ &\quad + [(-\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi \cos \vartheta)B_x + (-\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \vartheta)B_y + (\cos \varphi \sin \vartheta)B_z + N_y]^2 \\ &\quad + [(\sin \psi \sin \vartheta)B_x + (-\cos \psi \sin \vartheta)B_y + (\cos \vartheta)B_z + N_z]^2 \\ &= B_x^2 + B_y^2 + B_z^2 + N_x^2 + N_y^2 + N_z^2 \\ &\quad + 2B_x \begin{bmatrix} N_x (\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \vartheta) \\ + N_y (-\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi \cos \vartheta) \\ + N_z (\sin \psi \sin \vartheta) \end{bmatrix} \\ &\quad + 2B_y \begin{bmatrix} N_x (\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \cos \vartheta) \\ + N_y (-\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \vartheta) \\ + N_z (\cos \psi \sin \vartheta) \end{bmatrix} \\ &\quad + 2B_z \begin{bmatrix} N_x (\sin \varphi \sin \vartheta) \\ + N_y (\cos \varphi \sin \vartheta) \\ + N_z (\cos \vartheta) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4.2.1 Die Ableitung des Betrages nach φ

Sortiert man die Ableitung nach φ nach Sinus und Kosinus-Anteilen, ergibt sich folgender Ausdruck:

$$\frac{d|\mathbf{B}_N|^2}{d\varphi} = 2 \left(\begin{array}{l} \sin \varphi \left[N_x (-B_x \cos \psi - B_y \sin \psi) \right. \\ \left. + N_y (+B_x \sin \psi \cos \vartheta - B_y \cos \psi \cos \vartheta - B_z \sin \vartheta) \right] \\ + \cos \varphi \left[N_x (-B_x \sin \psi \cos \vartheta + B_y \cos \psi \cos \vartheta + B_z \sin \vartheta) \right. \\ \left. + N_y (-B_x \cos \psi - B_y \sin \psi) \right] \end{array} \right) = 0$$

Es treten nur Anteile der Grundfrequenz der Rotation auf. Da φ variabel gehalten wird, müssen die in eckigen Klammern stehenden Ausdrücke jeweils gleich Null sein. Nutzt man die in Abschnitt 4.1. vereinbarten Koeffizienten, ergeben sich im N_x, N_y, N_z -Raum zwei Gleichungen der Form:

$$a_1 N_x + a_2 N_y = 0$$

Die Koeffizienten für den Sinus-Anteil (a_1^S, a_2^S) und den Kosinus-Anteil (a_1^C, a_2^C) ergeben sich wie folgt:

$$\begin{aligned} a_1^S &= -(B_x \cos \psi + B_y \sin \psi) \\ a_2^S &= (B_x \sin \psi - B_y \cos \psi) \cos \vartheta - B_z \sin \vartheta \\ a_1^C &= -(B_x \sin \psi - B_y \cos \psi) \cos \vartheta + B_z \sin \vartheta \\ a_2^C &= -(B_x \cos \psi + B_y \sin \psi) \end{aligned}$$

Man erhält die folgenden Eichgleichungen:

$$\begin{aligned} N_x &= -\frac{a_2^S}{a_1^S} N_y = -\frac{(B_x \sin \psi - B_y \cos \psi) \cos \vartheta - B_z \sin \vartheta}{(B_x \cos \psi + B_y \sin \psi)} N_y && \text{für die Sinus-Anteile} \\ N_x &= -\frac{a_2^C}{a_1^C} N_y = -\frac{(B_x \cos \psi + B_y \sin \psi)}{(B_x \sin \psi - B_y \cos \psi) \cos \vartheta - B_z \sin \vartheta} N_y && \text{für die Kosinus-Anteile} \end{aligned}$$

Da N_z beliebig ist, beschreiben beide Gleichungen jeweils Ebenen senkrecht zur N_x - N_y -Ebene. In Abbildung 4-1 werden beide Lösungsmengen in einer Grafik dargestellt. Die Schnittlinie ist die N_z Achse. Somit sind die Nullpunkte N_x und N_y eindeutig bestimmbar. Über den Nullpunkt der Z-Komponente kann keine Aussage gemacht werden.

Weiterhin ist das Gleichungssystem gelöst, wenn die Koeffizienten a_1 und a_2 gleich Null sind. Da $(B_x \cos \psi + B_y \sin \psi)$ die Projektion von B_x und B_y auf die Knotenlinie und $((B_x \sin \psi - B_y \cos \psi) \cos \vartheta - B_z \sin \vartheta)$ die Projektion der Feldkomponenten auf die in der Rotationsebene senkrecht zur Knotenlinie liegende Achse ist, tritt diese auszuschließende Lösung ein, wenn die Rotationsachse identisch der Feldrichtung ist.

4.2.2 Die Ableitung des Betrages nach ψ

Sortiert man die Ableitung nach ψ nach Sinus und Kosinus-Anteilen, ergibt sich folgender Ausdruck:

$$d|\mathbf{B}_N|^2/d\psi = 2 \left(\begin{array}{l} \sin \psi \left[\begin{array}{l} N_x (-B_x \cos \varphi - B_y \sin \varphi \cos \vartheta) \\ + N_y (+B_x \sin \varphi - B_y \cos \varphi \cos \vartheta) \\ + N_z (+B_y \sin \vartheta) \end{array} \right] \\ + \cos \psi \left[\begin{array}{l} N_x (-B_x \sin \varphi \cos \vartheta + B_y \cos \varphi) \\ + N_y (-B_x \cos \varphi \cos \vartheta - B_y \sin \varphi) \\ + N_z (+B_x \sin \vartheta) \end{array} \right] \end{array} \right) = 0$$

Auf Grund der Beliebigkeit von ψ müssen die Anteile in den eckigen Klammern Null sein. Es ergeben sich im N_x, N_y, N_z – Raum zwei Gleichungen der Form:

$$a_1 N_x + a_2 N_y + a_3 N_z = 0$$

Die Koeffizienten der Sinus- und Kosinus-Anteile nehmen folgende Gestalt an:

$$a_1^S = -B_x \cos \varphi - B_y \sin \varphi \cos \vartheta$$

$$a_2^S = B_x \sin \varphi - B_y \cos \varphi \cos \vartheta$$

$$a_3^S = B_y \sin \vartheta$$

$$a_1^C = -B_x \sin \varphi \cos \vartheta + B_y \cos \varphi$$

$$a_2^C = -B_x \cos \varphi \cos \vartheta - B_y \sin \varphi$$

$$a_3^C = B_x \sin \vartheta$$

Beide Gleichungen beschreiben Ebenen. Da das Skalarprodukt der Ebenennormalen $(a_1^S a_1^C + a_2^S a_2^C + a_3^S a_3^C)$ gleich Null ist, stehen beide Ebenen senkrecht aufeinander.

Formt man die Ebenengleichung nach B_x und B_y um, ergibt sich das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} -N_x \cos \varphi + N_y \sin \varphi & (-N_x \sin \varphi - N_y \cos \varphi) \cos \vartheta + N_z \sin \vartheta \\ (-N_x \sin \varphi - N_y \cos \varphi) \cos \vartheta + N_z \sin \vartheta & N_x \cos \varphi - N_y \sin \varphi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix} = 0$$

Die Ebenengleichungen im B_x, B_y, B_z – Raum sind unabhängig von B_z . Die B_z Achse (Rotationsachse) liegt somit in beiden Ebenen und ist zwangsläufig die Schnittgerade beider Ebenen. Sind B_x und B_y gleich Null, ist die Gleichung erfüllt. Dies ist die auszuschließende Lösung. Die Gleichung ist weiterhin erfüllt, wenn die Determinante der Matrix gleich Null ist. Hieraus lassen sich die Bedingungen für die Nullpunkte ableiten.

$$\text{Die Determinante } (-N_x \cos \varphi + N_y \sin \varphi)^2 + ((-N_x \sin \varphi - N_y \cos \varphi) \cos \vartheta + N_z \sin \vartheta)^2$$

ist auf Grund der Summe der Quadrate nur Null, wenn beide Klammerausdrücke gleich Null sind. Die Nullpunkte müssen folgenden Gleichungen genügen:

$$\begin{aligned} (-N_x \cos \varphi + N_y \sin \varphi) &= 0; N_z \text{ beliebig} \\ ((-N_x \sin \varphi - N_y \cos \varphi) \cos \vartheta + N_z \sin \vartheta) &= 0 \end{aligned}$$

Da die gemeinsame Lösungsmenge (siehe Abb. 4-1) die Menge der Nullpunktvektoren entlang der Rotationsachse ist, läßt sich der Nullpunktvektor \mathbf{N} nur senkrecht zur Rotationsachse bestimmen. In Richtung der Rotationsachse ist er beliebig.

4.2.3 Die Ableitung des Betrages nach ϑ

Sortiert man die Ableitung nach ϑ nach Sinus und Kosinus-Anteilen, ergibt sich folgender Ausdruck:

$$d|\mathbf{B}_N|^2 / d\vartheta = 2 \left(\begin{array}{l} \sin \vartheta \left[\begin{array}{l} N_x (B_x \sin \varphi \sin \psi - B_y \sin \varphi \cos \psi) \\ + N_y (B_x \cos \varphi \sin \psi - B_y \cos \varphi \cos \psi) \\ + N_z (-B_z) \end{array} \right] \\ + \cos \vartheta \left[\begin{array}{l} N_x (B_z \sin \varphi) \\ + N_y (B_z \cos \varphi) \\ + N_z (B_x \sin \psi - B_y \cos \psi) \end{array} \right] \end{array} \right) = 0$$

Auf Grund der Beliebigkeit von ϑ müssen die Anteile in den eckigen Klammern Null sein. Es ergeben sich im N_x, N_y, N_z – Raum zwei Gleichungen der Form:

$$a_1 N_x + a_2 N_y + a_3 N_z = 0$$

Die Koeffizienten der Sinus- und Kosinus-Anteile lassen sich wie folgt zusammenfassen:

$$a_1^S = B_x \sin \varphi \sin \psi - B_y \sin \varphi \cos \psi$$

$$a_2^S = B_x \cos \varphi \sin \psi - B_y \cos \varphi \cos \psi$$

$$a_3^S = -B_z$$

$$a_1^C = B_z \sin \varphi$$

$$a_2^C = B_z \cos \varphi$$

$$a_3^C = B_x \sin \psi - B_y \cos \psi$$

Separiert man Feldgrößen und Nullpunkte, ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} (N_x \sin \varphi + N_y \cos \varphi) & -N_z \\ N_z & (N_x \sin \varphi + N_y \cos \varphi) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} B_x \sin \psi - B_y \cos \psi \\ B_z \end{pmatrix} = 0$$

Das Gleichungssystem ist erfüllt, wenn entweder die Determinante der Matrix oder der Vektor gleich Null ist. Die Determinante $(N_x \sin \varphi + N_y \cos \varphi)^2 + (N_z)^2$ ist auf Grund der Summe der Quadrate nur Null, wenn beide Klammerausdrücke gleich Null sind. Jeder Klammerausdruck liefert eine Ebene im N_x, N_y, N_z – Raum als Lösungsmenge. Die Ebenen sind wie folgt definiert:

$$(N_x \sin \varphi + N_y \cos \varphi) = 0; N_z \text{ beliebig}$$

$$N_z = 0; N_x, N_y \text{ beliebig}$$

Da beide Ebenen senkrecht aufeinander stehen (N_z bzw. N_x, N_y beliebig), muß es eine gemeinsame Lösungsmenge (Schnittgerade) geben. In Abbildung 4-1 werden die Ebenen grafisch dargestellt. Die Schnittgerade beider Ebenen ist die Rotationsachse im N_x, N_y, N_z – Koordinatensystem ($N_x \sin \varphi + N_y \cos \varphi = 0; N_z = 0$). N_z läßt sich demzufolge eindeutig bestimmen. Die Nullpunkte von N_x und N_y sind miteinander über den Tangens des Winkels φ verbunden.

Der die Feldkomponenten enthaltende Vektor ist gleich Null (auszuschließende Lösung), wenn sowohl $(B_x \sin \psi - B_y \cos \psi)$ als auch B_z gleich Null ist.

Da im B_x, B_y, B_z – Raum $(B_x \sin \psi - B_y \cos \psi)$ die Projektion von B_x und B_y auf die in der $B_x B_y$ – Ebene senkrecht zur Rotationsachse (Knotenlinie) liegende Achse ist, und B_z per Definition senkrecht auf der Rotationsachse steht (siehe Abb. 3-1), ist eine Nullpunktsbestimmung unmöglich, wenn die Feldrichtung identisch der Richtung der Rotationsachse ist.

4.2.4 Zusammenfassung der Analyse der Bestimmbarkeit von Nullpunktsfehlern

Die Analyse der Ableitung des Betrages nach den drei Eulerschen Winkeln liefert bei der Bestimmung der Nullpunktsfehler jeweils Schnittgeraden zweier senkrecht aufeinander stehender Ebenen. Die Lösungen sind in der folgenden Tabelle zusammengefaßt:

Winkel		Gleichungen	Interpretation
φ	f_{Rot}	$N_x = 0$ $N_y = 0$	beliebiger Nullpunkt in B_{Rz} -Richtung
	$2f_{\text{Rot}}$	-	
ψ	f_{Rot}	$(-N_x \cos \varphi + N_y \sin \varphi) = 0$ $((-N_x \sin \varphi - N_y \cos \varphi) \cos \vartheta + N_z \sin \vartheta) = 0$	beliebiger Nullpunkt in B_z -Richtung
	$2f_{\text{Rot}}$	-	
ϑ	f_{Rot}	$(N_x \sin \varphi + N_y \cos \varphi) = 0$ $N_z = 0$	beliebiger Nullpunkt in Richtung der Knotenlinie
	$2f_{\text{Rot}}$	-	

Die auszuschließenden Feldbedingungen sind in folgender Tabelle zusammengefaßt:

Winkel		Gleichung	Interpretation
φ	f_{Rot}	$(B_x \cos \psi + B_y \sin \psi) = 0$ und $((B_x \sin \psi - B_y \cos \psi) \cos \vartheta - B_z \sin \vartheta) = 0$	Feld parallel zur B_{Rz} - Richtung
	$2f_{\text{Rot}}$	-	
ψ	f_{Rot}	$B_x = 0$ und $B_y = 0$	Feld parallel zur B_z - Richtung
	$2f_{\text{Rot}}$	-	
ϑ	f_{Rot}	$(B_x \sin \psi - B_y \cos \psi) = 0$ und $B_z = 0$	Feld parallel zur Knotenlinie
	$2f_{\text{Rot}}$	-	

Bezogen auf die Rotationsachse liefern die Drehungen identische Resultate.

Die Lösungsmengen sowohl im N_x, N_y, N_z – Raum als auch im B_x, B_y, B_z – Raum sind jeweils die Rotationsachsen. Die Lösungsmengen sind immer Geraden, die durch aufeinander senkrecht stehenden Ebenen definiert werden.

Folgende Konsequenzen lassen sich ableiten:

- Bei der Bewegung um einen Freiheitsgrad sind nur die Nullpunktskomponenten quer zur Rotationsachse bestimmbar. Die Nullpunktskomponente in Richtung der Rotationsachse ist beliebig.
- Nebeneffekt: Variiert man einen Nullpunkt eines rotierenden Satelliten, dessen Rotationsachse nicht mit einer Magnetometerachse übereinstimmt, läßt sich mittels der Minimierung der Rotationsfrequenz im Betrag die Koordinatendrehung zwischen Magnetometer und Satellitensystem berechnen.
- Die Bewegung um zwei Freiheitsgrade ist ausreichend, um die Nullpunkte für alle Komponenten zu bestimmen. Die Geraden schneiden sich im Koordinatenursprung. Dies ist die einzige Lösung. Daraus folgt, daß zur vollständigen Bestimmung der Nullpunkte eine Rotation plus Nutation hinreichend ist.
- Eine gleichzeitige Drehung um drei Freiheitsgrade liefert keinen Widerspruch, da sich alle Geraden im Koordinatenursprung schneiden.
- Aus den auszuschließenden Feldbedingungen folgt, daß das Feld nicht Null und die Feldrichtung nicht identisch der Richtung der Rotationsachse sein darf. Bei einer Drehung um drei Freiheitsgrade kann die Feldrichtung beliebig sein, da die Richtung von mindestens zwei Rotationsachsen nicht mit der Feldrichtung übereinstimmen kann.

In der Abbildung 4-1 sind die Lösungen für die drei Rotationswinkel grafisch dargestellt. Die Schnittgerade ist jeweils die Rotationsachse.

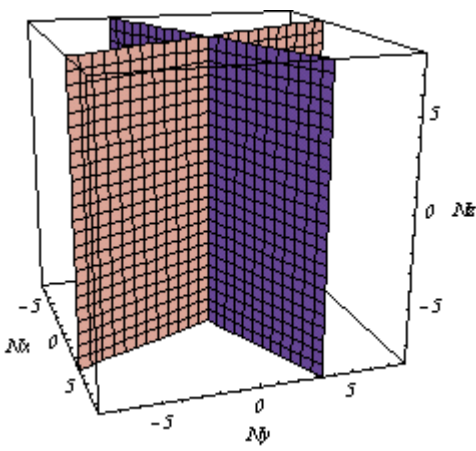
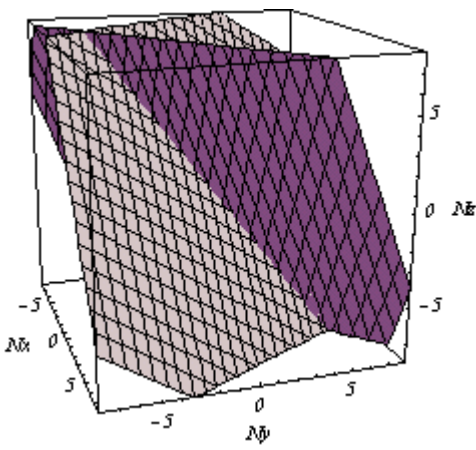
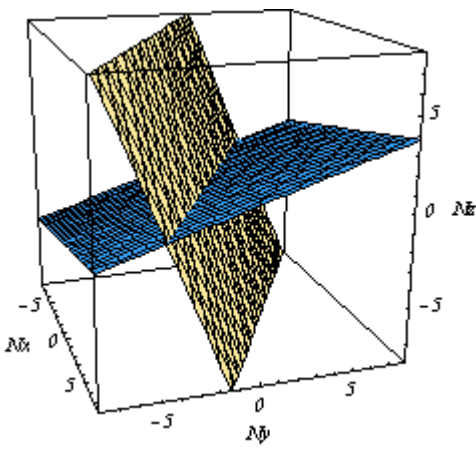
	Einfache Rotationsfrequenz	Parameter
Kosinus- und Sinus-Anteile bei Rotation um φ		$\psi = 30^\circ$ $B_x = -40\text{nT}$ $\vartheta = -40^\circ$ $B_y = 20\text{nT}$ $B_z = 30\text{nT}$
Kosinus- und Sinus-Anteile bei Rotation um ψ		$\varphi = 30^\circ$ $B_x = -40\text{nT}$ $\vartheta = -40^\circ$ $B_y = 20\text{nT}$ $B_z = 30\text{nT}$
Kosinus- und Sinus-Anteile bei Rotation um ϑ		$\varphi = 30^\circ$ $B_x = -40\text{nT}$ $\psi = -40^\circ$ $B_y = 20\text{nT}$ $B_z = 30\text{nT}$

Abbildung 4-1: Grafische Darstellung der Lösungsmengen für die Nullpunktsfehler in Abhängigkeit der Bewegungsfreiheitsgrade φ , ψ und ϑ .

4.3 Der Einfluß des Skalenwertes

Betrachtet man ausschließlich den Skalenwert als Fehlerquelle, werden die Nullpunkte gleich Null, die Hauptachsenelemente der Orthogonalitätsmatrix gleich Eins und die nicht in der Hauptachse liegenden Elemente der Orthogonalitätsmatrix gleich Null gesetzt.

$$\begin{pmatrix} B_{RNx} \\ B_{RNy} \\ B_{RNz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Sk_x & 0 & 0 \\ 0 & Sk_y & 0 \\ 0 & 0 & Sk_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{Rx} \\ B_{Ry} \\ B_{Rz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} Sk_x B_{Rx} \\ Sk_y B_{Ry} \\ Sk_z B_{Rz} \end{pmatrix}$$

Das Quadrat des Betrages berechnet sich wie folgt:

$$|\mathbf{B}_N|^2 = (Sk_x B_{Rx})^2 + (Sk_y B_{Ry})^2 + (Sk_z B_{Rz})^2$$

Ersetzt man das Magnetfeld \mathbf{B}_R im Sensorsystem durch das Produkt von Rotationsmatrix \mathbf{R} und Magnetfeld \mathbf{B} im ortsfesten Koordinatensystem, ergibt sich folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} |\mathbf{B}_N|^2 &= [(\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \vartheta)B_x + (\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \cos \vartheta)B_y + (\sin \varphi \sin \vartheta)B_z]^2 Sk_x^2 \\ &\quad + [(-\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi \cos \vartheta)B_x + (-\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \vartheta)B_y + (\cos \varphi \sin \vartheta)B_z]^2 Sk_y^2 \\ &\quad + [(\sin \psi \sin \vartheta)B_x + (-\cos \psi \sin \vartheta)B_y + (\cos \vartheta)B_z]^2 Sk_z^2 \\ &= B_x^2 [(\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \vartheta)^2 Sk_x^2 + (-\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi \cos \vartheta)^2 Sk_y^2 + (\sin \psi \sin \vartheta)^2 Sk_z^2] \\ &\quad + B_y^2 [(\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \cos \vartheta)^2 Sk_x^2 + (-\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \vartheta)^2 Sk_y^2 + (-\cos \psi \sin \vartheta)^2 Sk_z^2] \\ &\quad + B_z^2 [(\sin \varphi \sin \vartheta)^2 Sk_x^2 + (\cos \varphi \sin \vartheta)^2 Sk_y^2 + (\cos \vartheta)^2 Sk_z^2] \\ &\quad + 2B_x B_y \left[(\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \vartheta)(\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \cos \vartheta) Sk_x^2 \right. \\ &\quad \left. + (-\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi \cos \vartheta)(-\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \vartheta) Sk_y^2 \right. \\ &\quad \left. + (\sin \psi \sin \vartheta)(-\cos \psi \sin \vartheta) Sk_z^2 \right] \\ &\quad + 2B_x B_z \left[(\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \vartheta)(\sin \varphi \sin \vartheta) Sk_x^2 \right. \\ &\quad \left. + (-\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi \cos \vartheta)(\cos \varphi \sin \vartheta) Sk_y^2 \right. \\ &\quad \left. + (\sin \psi \sin \vartheta)(\cos \vartheta) Sk_z^2 \right] \\ &\quad + 2B_y B_z \left[(\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \cos \vartheta)(\sin \varphi \sin \vartheta) Sk_x^2 \right. \\ &\quad \left. + (-\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \vartheta)(\cos \varphi \sin \vartheta) Sk_y^2 \right. \\ &\quad \left. + (-\cos \psi \sin \vartheta)(\cos \vartheta) Sk_z^2 \right] \end{aligned}$$

Umgeformt ergibt sich folgender Ausdruck:

$$\begin{aligned}
 8|\mathbf{B}_N|^2 = & \begin{array}{ll} B_x^2 & (3Sk_x^2 + 3Sk_y^2 + 2Sk_z^2) \\ + & B_y^2 & (3Sk_x^2 + 3Sk_y^2 + 2Sk_z^2) \\ + & B_z^2 & (2Sk_x^2 + 2Sk_y^2 + 4Sk_z^2) \\ + \cos 2\vartheta & (B_x^2 + B_y^2 - 2B_z^2) & (Sk_x^2 + Sk_y^2 - 2Sk_z^2) \\ + \cos 2\varphi(1 - \cos 2\vartheta) & (B_x^2 + B_y^2 - 2B_z^2) & (Sk_x^2 - Sk_y^2) \\ + \cos 2\psi(1 - \cos 2\vartheta) & (B_x^2 - B_y^2) & (Sk_x^2 + Sk_y^2 - 2Sk_z^2) \\ + \cos 2\varphi \cos 2\psi(3 + \cos 2\vartheta) & (B_x^2 - B_y^2) & (Sk_x^2 - Sk_y^2) \\ - 4\sin 2\varphi \sin 2\psi \cos \vartheta & (B_x^2 - B_y^2) & (Sk_x^2 - Sk_y^2) \\ + 2\sin 2\psi(1 - \cos 2\vartheta) & (B_x B_y) & (Sk_x^2 + Sk_y^2 - 2Sk_z^2) \\ - 4\sin \psi \sin 2\vartheta & (B_x B_z) & (Sk_x^2 + Sk_y^2 - 2Sk_z^2) \\ + 4\cos \psi \sin 2\vartheta & (B_y B_z) & (Sk_x^2 + Sk_y^2 - 2Sk_z^2) \\ + 2\cos 2\varphi \sin 2\psi(3 + \cos 2\vartheta) & (B_x B_y) & (Sk_x^2 - Sk_y^2) \\ + 8\sin 2\varphi \cos 2\psi \cos \vartheta & (B_x B_y) & (Sk_x^2 - Sk_y^2) \\ + 4\cos 2\varphi \sin \psi \sin 2\vartheta & (B_x B_z) & (Sk_x^2 - Sk_y^2) \\ + 8\sin 2\varphi \cos \psi \sin \vartheta & (B_x B_z) & (Sk_x^2 - Sk_y^2) \\ - 4\cos 2\varphi \cos \psi \sin 2\vartheta & (B_y B_z) & (Sk_x^2 - Sk_y^2) \\ + 8\sin 2\varphi \sin \psi \sin \vartheta & (B_y B_z) & (Sk_x^2 - Sk_y^2) \end{array}
 \end{aligned}$$

4.3.1 Die Ableitung des Betrages nach φ

Sortiert man die Ableitung nach φ nach Sinus und Kosinus-Anteilen, ergibt sich folgender Ausdruck:

$$\frac{d|\mathbf{B}_N|^2}{d\varphi} = \frac{1}{4}(Sk_x^2 - Sk_y^2) \left(\begin{array}{l} \sin 2\varphi \left[\begin{array}{ll} -(1 - \cos 2\vartheta) & (B_x^2 + B_y^2 - 2B_z^2) \\ -\cos 2\psi (3 + \cos 2\vartheta) & (B_x^2 - B_y^2) \\ -2\sin 2\psi (3 + \cos 2\vartheta) & (B_x B_y) \\ -4\sin \psi \sin 2\vartheta & (B_x B_z) \\ +4\cos \psi \sin 2\vartheta & (B_y B_z) \end{array} \right] \\ + \cos 2\varphi \left[\begin{array}{ll} -4\sin 2\psi \cos \vartheta & (B_x^2 - B_y^2) \\ +8\cos 2\psi \cos \vartheta & (B_x B_y) \\ +8\cos \psi \sin \vartheta & (B_x B_z) \\ +8\sin \psi \sin \vartheta & (B_y B_z) \end{array} \right] \end{array} \right) = 0$$

Es treten nur Anteile der doppelten Rotationsfrequenz auf. Da φ variabel gehalten wird, müssen die in eckigen Klammern stehenden Ausdrücke jeweils gleich Null sein. Nutzt man die in Abschnitt 4.1. vereinbarten Koeffizienten, ergeben sich im Sk_x, Sk_y, Sk_z – Raum zwei Gleichungen der Form:

$$a_{11}(Sk_x^2 - Sk_y^2) = 0$$

Die Koeffizienten für den Sinus-Anteil (a_{11}^S) und den Kosinus-Anteil (a_{11}^C) ergeben sich wie folgt:

$$a_{11}^S = (-B_x \cos \psi - B_y \sin \psi)^2 - ((B_x \sin \psi - B_y \cos \psi) \cos \vartheta - B_z \sin \vartheta)^2$$

$$a_{11}^C = (-B_x \cos \psi - B_y \sin \psi) \cdot ((B_x \sin \psi - B_y \cos \psi) \cos \vartheta - B_z \sin \vartheta)$$

Da ausschließlich die Koeffizienten der quadratischen Terme belegt sind und deren Koeffizienten identisch sind, ist die Lösung offensichtlich. Entweder Sk_x^2 ist gleich Sk_y^2 oder der Koeffizient a_{11} ist Null.

Um das Behandlungsschema für eine Fläche zweiter Ordnung beizubehalten, soll formal der Weg über die charakteristischen Parameter dieser Flächen gegangen werden. Eine Verschiebung in den Symmetriepunkt und die Hauptachsentransformation entfällt, da sich die Flächen auf Grund der nicht besetzten linearen Glieder bereits im Koordinatenursprung befinden und auf Grund der nicht besetzten Nichtdiagonalelemente bereits achsensymmetrisch sind. Die charakteristischen Parameter der Fläche können für Sinus- und Kosinus-Anteile wie folgt direkt übernommen werden:

$$\begin{aligned} d_{11}^S &= a_{11}^S & d_{11}^C &= a_{11}^C \\ d_{22}^S &= -a_{11}^S & d_{22}^C &= -a_{11}^C \\ d_{33}^S &= 0 & d_{33}^C &= 0 \\ b_0^S &= 0 & b_0^C &= 0 \end{aligned}$$

Die durch die charakteristischen Parameter beschriebenen Flächen zweiter Ordnung entarten jeweils zu einem Paar sich schneidender Ebenen. Die Ebenen sind auf Grund der entgegengesetzten Vorzeichen der d_{11} und d_{22} Parameter (bei gleichem Betrag) durch die Diagonalen in der $Sk_x Sk_y$ -Ebene fixiert und liegen auf Grund der Beliebigkeit von Sk_z parallel zur Sk_z Achse. Da diese Symmetrie für beide Gleichungen gilt, liefern Sinus und Kosinusanteile der doppelten Rotationsfrequenz ein und die selbe Lösung. So ist die gemeinsame Lösung eine aus zwei Ebenen bestehende Fläche, die durch die Diagonale der $Sk_x Sk_y$ -Ebene und die Sk_z Achse bestimmt wird. Abbildung 4-2 zeigt die Lösungsmenge grafisch.

Die Koeffizienten a_{11} setzen sich aus der Differenz der Quadrate (a_{11}^S) bzw. dem Produkt (a_{11}^C) von $((B_x \sin \psi - B_y \cos \psi) \cos \vartheta - B_z \sin \vartheta)$ und $(-B_x \cos \psi - B_y \sin \psi)$ zusammen. Ein Gleichungssystem der Form $(a \cdot b = 0)$ und $(a^2 - b^2 = 0)$ ist erfüllt, wenn sowohl a als auch b gleich Null sind. Da $(-B_x \cos \psi - B_y \sin \psi)$ die Projektion von B_x und B_y auf die Knotenlinie und $((B_x \sin \psi - B_y \cos \psi) \cos \vartheta - B_z \sin \vartheta)$ die Projektion der Feldkomponenten auf die in der Rotationsebene senkrecht zur Knotenlinie liegende Achse ist, sind die Koeffizienten a_{11} gleich Null, wenn die Feldrichtung gleich der Richtung der Rotationsachse ist. Hierbei handelt es sich um die auszuschließende Lösung.

4.3.2 Die Ableitung des Betrages nach ψ

Sortiert man die Ableitung nach ψ nach einfacher und doppelter Rotationsfrequenz sowie nach Sinus und Kosinus-Anteilen, ergibt sich folgender Ausdruck:

$$d|\mathbf{B}_N|^2 / d\psi = \frac{1}{4} \left(\begin{array}{l} \sin \psi \begin{bmatrix} -2 \sin 2\vartheta & (B_y B_z) & (Sk_x^2 + Sk_y^2 - 2Sk_z^2) \\ -4 \sin 2\varphi \sin \vartheta & (B_x B_z) & (Sk_x^2 - Sk_y^2) \\ +2 \cos 2\varphi \sin 2\vartheta & (B_y B_z) & (Sk_x^2 - Sk_y^2) \end{bmatrix} \\ \cos \psi \begin{bmatrix} -2 \sin 2\vartheta & (B_x B_z) & (Sk_x^2 + Sk_y^2 - 2Sk_z^2) \\ +4 \sin 2\varphi \sin \vartheta & (B_y B_z) & (Sk_x^2 - Sk_y^2) \\ +2 \cos 2\varphi \sin 2\vartheta & (B_x B_z) & (Sk_x^2 - Sk_y^2) \end{bmatrix} \\ \sin 2\psi \begin{bmatrix} -(1 - \cos 2\vartheta) & (B_x^2 - B_y^2) & (Sk_x^2 + Sk_y^2 - 2Sk_z^2) \\ -\cos 2\varphi(3 + \cos 2\vartheta) & (B_x^2 - B_y^2) & (Sk_x^2 - Sk_y^2) \\ -8 \sin 2\varphi \cos \vartheta & (B_x B_y) & (Sk_x^2 - Sk_y^2) \end{bmatrix} \\ \cos 2\psi \begin{bmatrix} +2(1 - \cos 2\vartheta) & (B_x B_y) & (Sk_x^2 + Sk_y^2 - 2Sk_z^2) \\ +2 \cos 2\varphi(3 + \cos 2\vartheta) & (B_x B_y) & (Sk_x^2 - Sk_y^2) \\ -4 \sin 2\varphi \cos \vartheta & (B_x^2 - B_y^2) & (Sk_x^2 - Sk_y^2) \end{bmatrix} \end{array} \right) = 0$$

Da ψ variabel gehalten wird, müssen die in eckigen Klammern stehenden Ausdrücke jeweils gleich Null sein. Es ergeben sich im Sk_x, Sk_y, Sk_z – Raum vier Gleichungen der Form:

$$a_{11} Sk_x^2 + a_{22} Sk_y^2 + a_{33} Sk_z^2 = 0$$

Die Koeffizienten für den Sinus- und Kosinusanteil der einfachen Rotationsfrequenz (a_{ii}^S, a_{ii}^C) sowie die Koeffizienten für den Sinus- und Kosinusanteil der doppelten Rotationsfrequenz (a_{ii}^{2S}, a_{ii}^{2C}) ergeben sich wie folgt:

$$a_{11}^S = (-B_y \sin 2\vartheta (1 - \cos 2\varphi) - 2B_x \sin \vartheta \sin 2\varphi) B_z$$

$$a_{22}^S = (-B_y \sin 2\vartheta (1 + \cos 2\varphi) + 2B_x \sin \vartheta \sin 2\varphi) B_z$$

$$a_{33}^S = (2B_y \sin 2\vartheta) B_z$$

$$a_{11}^C = (-B_x \sin 2\vartheta (1 - \cos 2\varphi) + 2B_y \sin \vartheta \sin 2\varphi) B_z$$

$$a_{22}^C = (-B_x \sin 2\vartheta (1 + \cos 2\varphi) - 2B_y \sin \vartheta \sin 2\varphi) B_z$$

$$a_{33}^C = (2B_x \sin 2\vartheta) B_z$$

$$a_{11}^{2S} = -(B_x^2 - B_y^2) \left((1 - \cos 2\vartheta) + \cos 2\varphi(3 + \cos 2\vartheta) \right) - 8B_x B_y \cos \vartheta \sin 2\varphi$$

$$a_{22}^{2S} = -(B_x^2 - B_y^2) \left((1 - \cos 2\vartheta) - \cos 2\varphi(3 + \cos 2\vartheta) \right) + 8B_x B_y \cos \vartheta \sin 2\varphi$$

$$a_{33}^{2S} = 2(B_x^2 - B_y^2) (1 - \cos 2\vartheta)$$

$$a_{11}^{2C} = 2B_x B_y \left((1 - \cos 2\vartheta) + \cos 2\varphi(3 + \cos 2\vartheta) \right) - 4(B_x^2 - B_y^2) \cos \vartheta \sin 2\varphi$$

$$a_{22}^{2C} = 2B_x B_y \left((1 - \cos 2\vartheta) - \cos 2\varphi(3 + \cos 2\vartheta) \right) + 4(B_x^2 - B_y^2) \cos \vartheta \sin 2\varphi$$

$$a_{33}^{2C} = -4B_x B_y (1 - \cos 2\vartheta)$$

In allen vier Fällen handelt es sich um Flächen zweiter Ordnung, bei denen ausschließlich die Koeffizienten der quadratischen Terme (Hauptachsenelemente) belegt sind.

Die Nichtbelegung der Koeffizienten der linearen und gemischten Terme hat zur Konsequenz, daß die Flächen bereits symmetrisch zu Ursprung und Achsen des Sk_x, Sk_y, Sk_z – Raumes liegen. Die Koeffizienten können somit ohne Verschiebung und Hauptachsentransformation direkt in die charakteristischen Parameter überführt werden. Es gilt:

$$\begin{array}{llll}
 d_{11}^S = a_{11}^S & d_{11}^C = a_{11}^C & d_{11}^{2S} = a_{11}^{2S} & d_{11}^{2C} = a_{11}^{2C} \\
 d_{22}^S = a_{22}^S & d_{22}^C = a_{22}^C & d_{22}^{2S} = a_{22}^{2S} & d_{22}^{2C} = a_{22}^{2C} \\
 d_{33}^S = a_{33}^S & d_{33}^C = a_{33}^C & d_{33}^{2S} = a_{33}^{2S} & d_{33}^{2C} = a_{33}^{2C} \\
 b_0^S = 0 & b_0^C = 0 & b_0^{2S} = 0 & b_0^{2C} = 0
 \end{array}$$

Da b_0 in allen Fällen gleich Null ist, handelt es sich bei den Lösungsmengen um elliptische Doppelkegel.

Substituiert man in den Parametern d_{ii}^C der Kosinus-Anteile der einfachen Rotationsfrequenz B_x durch B_y und B_y durch $-B_x$, erhält man die Parameter d_{ii}^S der Sinus-Anteile. Folglich sind die Flächen zwei um 90° verdrehte formgleiche Doppelkegel. Der Symmetriepunkt befindet sich im Koordinatenursprung. Die gemeinsame Lösung sind die Diagonalen des Sk_x, Sk_y, Sk_z – Raumes.

Substituiert man in den Parametern d_{ii}^{2C} der Kosinus-Anteile der doppelten Rotationsfrequenz $2B_x B_y$ durch $-(B_x^2 - B_y^2)$ und $(B_x^2 - B_y^2)$ durch $2B_x B_y$, erhält man die Parameter d_{ii}^{2S} der Sinus-Anteile. Die wechselseitige Symmetrie der Halbachsen ist auch hier wieder gegeben. Somit schneiden sich die Doppelkegel auch im Fall der doppelten Rotationsfrequenz in den Diagonalen des Sk_x, Sk_y, Sk_z – Raumes.

Die Anteile an Rotationsfrequenz und doppelter Rotationsfrequenz liefern somit identische Lösungen. Sie sind nicht voneinander unabhängig. Obwohl vier Gleichungen für drei Unbekannte zur Verfügung stehen, gibt es keine Punktlösung. Die Lösungsmenge sind die Diagonalen des Sk_x, Sk_y, Sk_z – Raumes. In Abbildung 4-3 werden die Lösungsmengen grafisch dargestellt.

Die charakteristischen Parameter der Flächen sind gleich Null, wenn die Richtung der Rotationsachse identisch mit der des Feldes ist ($B_x = B_y = 0$). Die Gleichungen würden in diesem Fall unabhängig von den Skalenwerten gelöst sein. Diese Lösung muß ausgeschlossen werden.

Weiterhin sind die charakteristischen Parameter der aus den Anteilen der einfachen Rotationsfrequenz resultierenden Flächen gleich Null, wenn das Feld in Richtung der Rotationsachse (B_z) gleich Null ist. Hier wird die Lösungsmenge ausschließlich von den Anteilen der doppelten Rotationsfrequenz erzeugt.

4.3.3 Die Ableitung des Betrages nach ϑ

Sortiert man die Ableitung nach ϑ nach einfacher und doppelter Rotationsfrequenz sowie nach Sinus und Kosinus-Anteilen, ergibt sich folgender Ausdruck:

$$d|\vec{B}_N|^2 / d\vartheta = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sin \vartheta \begin{bmatrix} +2 \sin 2\varphi \sin 2\psi & (B_x^2 - B_y^2) & (Sk_x^2 - Sk_y^2) \\ -4 \sin 2\varphi \cos 2\psi & (B_x B_y) & (Sk_x^2 - Sk_y^2) \end{bmatrix} \\ \cos \vartheta \begin{bmatrix} +4 \sin 2\varphi \cos \psi & (B_x B_z) & (Sk_x^2 - Sk_z^2) \\ +4 \sin 2\varphi \sin \psi & (B_y B_z) & (Sk_y^2 - Sk_z^2) \end{bmatrix} \\ \sin 2\vartheta \begin{bmatrix} - & (B_x^2 + B_y^2 - 2B_z^2) & (Sk_x^2 + Sk_y^2 - 2Sk_z^2) \\ +\cos 2\varphi & (B_x^2 + B_y^2 - 2B_z^2) & (Sk_x^2 - Sk_y^2) \\ +\cos 2\psi & (B_x^2 - B_y^2) & (Sk_x^2 + Sk_y^2 - 2Sk_z^2) \\ -\cos 2\varphi \cos 2\psi & (B_x^2 - B_y^2) & (Sk_x^2 - Sk_y^2) \\ +2 \sin 2\psi & (B_x B_y) & (Sk_x^2 + Sk_y^2 - 2Sk_z^2) \\ -2 \cos 2\varphi \sin 2\psi & (B_x B_y) & (Sk_x^2 - Sk_y^2) \end{bmatrix} \\ \cos 2\vartheta \begin{bmatrix} -4 \sin \psi & (B_x B_z) & (Sk_x^2 + Sk_y^2 - 2Sk_z^2) \\ +4 \cos \psi & (B_y B_z) & (Sk_x^2 + Sk_y^2 - 2Sk_z^2) \\ +4 \cos 2\varphi \sin \psi & (B_x B_z) & (Sk_x^2 - Sk_y^2) \\ -4 \cos 2\varphi \cos \psi & (B_y B_z) & (Sk_y^2 - Sk_z^2) \end{bmatrix} \end{pmatrix} = 0$$

Da ϑ variabel gehalten wird, müssen die in eckigen Klammern stehenden Ausdrücke jeweils gleich Null sein. Es ergeben sich im Sk_x, Sk_y, Sk_z -Raum vier Gleichungen der Form:

$$a_{11} Sk_x^2 + a_{22} Sk_y^2 + a_{33} Sk_z^2 = 0$$

Die Koeffizienten für den Sinus- und Kosinusanteil der einfachen Rotationsfrequenz (a_{ii}^S, a_{ii}^C) sowie die Koeffizienten für den Sinus- und Kosinusanteil der doppelten Rotationsfrequenz (a_{ii}^{2S}, a_{ii}^{2C}) ergeben sich wie folgt:

$$a_{11}^S = a_{22}^S = 2 \sin 2\varphi (B_x \sin \psi - B_y \cos \psi) (B_x \cos \psi + B_y \sin \psi)$$

$$a_{33}^S = 0$$

$$a_{11}^C = a_{22}^C = B_z \sin 2\varphi (B_x \cos \psi + B_y \sin \psi)$$

$$a_{33}^C = 0$$

$$a_{11}^{2S} = -(1 - \cos 2\varphi) ((B_x \sin \psi - B_y \cos \psi)^2 - B_z^2)$$

$$a_{22}^{2S} = -(1 + \cos 2\varphi) ((B_x \sin \psi - B_y \cos \psi)^2 - B_z^2)$$

$$a_{33}^{2S} = 2 ((B_x \sin \psi - B_y \cos \psi)^2 - B_z^2)$$

$$a_{11}^{2C} = -(1 - \cos 2\varphi) (B_x \sin \psi - B_y \cos \psi) B_z$$

$$a_{22}^{2C} = -(1 + \cos 2\varphi) (B_x \sin \psi - B_y \cos \psi) B_z$$

$$a_{33}^{2C} = 2 (B_x \sin \psi - B_y \cos \psi) B_z$$

Auch hier handelt es sich in allen vier Fällen um Flächen zweiter Ordnung, bei denen ausschließlich die Koeffizienten der quadratischen Terme (Hauptachsenelemente) belegt sind. Die Nichtbelegung der Koeffizienten der linearen und gemischten Terme hat zur Konsequenz, daß die Flächen bereits symmetrisch zu Ursprung und Achsen des Sk_x, Sk_y, Sk_z – Raumes liegen. Die Koeffizienten können somit ohne Verschiebung und Hauptachsentransformation direkt in die charakteristischen Parameter überführt werden. Es gilt:

$$\begin{array}{llll}
 d_{11}^S = a_{11}^S & d_{11}^C = a_{11}^C & d_{11}^{2S} = a_{11}^{2S} & d_{11}^{2C} = a_{11}^{2C} \\
 d_{22}^S = -a_{11}^S & d_{22}^C = -a_{11}^C & d_{22}^{2S} = a_{22}^{2S} & d_{22}^{2C} = a_{22}^{2C} \\
 d_{33}^S = 0 & d_{33}^C = 0 & d_{33}^{2S} = a_{33}^{2S} & d_{33}^{2C} = a_{33}^{2C} \\
 b_0^S = 0 & b_0^C = 0 & b_0^{2S} = 0 & b_0^{2C} = 0
 \end{array}$$

Die Interpretation der Flächen kann im Fall der Flächen, die durch Anteile der einfachen Rotation entstanden sind, analog zu Abschnitt 4.3.1. (Rotation um φ) durchgeführt werden. Die Flächen zweiter Ordnung entarten jeweils zu einem Paar sich schneidender Ebenen. Die Ebenen sind auf Grund der entgegengesetzten Vorzeichen der d_{11} und d_{22} Parameter (bei gleichem Betrag) durch die Diagonalen in der $Sk_x Sk_y$ -Ebene fixiert und liegen auf Grund der Beliebigkeit von Sk_z parallel zur Sk_z Achse. Da diese Symmetrie für beide Gleichungen gilt, liefern Sinus und Kosinusanteile der doppelten Rotationsfrequenz ein und die selbe Lösung. So ist die gemeinsame Lösung eine aus zwei Ebenen bestehende Fläche, die durch die Diagonale der $Sk_x Sk_y$ -Ebene und die Sk_z Achse bestimmt wird.

Im Fall der Flächen, die durch Anteile der doppelten Rotation entstanden sind, ist der absolute Anteil b_0 gleich Null. Es handelt sich bei den Lösungsmengen um elliptische Doppelkegel. Die charakteristischen Parameter des Kegels der Kosinuslösung unterscheiden sich jedoch nur um einen gemeinsamen Faktor von denen der Sinuslösung. Multipliziert man die Parameter der Kosinus Lösung mit $\left((B_x \sin \psi - B_y \cos \psi)^2 - B_z^2\right) / \left((B_x \sin \psi - B_y \cos \psi) B_z\right)$, erhält man die Sinus Lösung. Somit fallen die Kegel beider Lösungen aufeinander.

Obwohl auch hier vier Gleichungen zur Verfügung stehen, kann keine Punktlösung für drei Unbekannte gefunden werden. Die Lösungen für die Sinus- und Kosinusanteile sind sowohl bei der einfachen als auch bei der doppelten Rotationsfrequenz nicht unabhängig voneinander. Effektiv bleiben zwei Flächen (Ebenen-Paar und Doppelkegel) erhalten, deren Schnittgerade die Raumdiagonalen im Sk_x, Sk_y, Sk_z – Raum sind. Abbildung 4-4 zeigt die Lösungsmenge grafisch.

Die Gleichungen sind unabhängig von den Skalenwerten gelöst (auszuschließende Lösung), wenn die charakteristischen Parameter der Flächen gleich Null werden.

Die aus der einfachen Rotationsfrequenz abgeleiteten Parameter werden sämtlich gleich

Null, wenn gilt: $\tan \psi = -\frac{B_x}{B_y}$

Die aus der doppelten Rotationsfrequenz abgeleiteten Parameter werden sämtlich gleich

Null, wenn gilt: $\tan \psi = \frac{B_x}{B_y}$ und $B_z = 0$

Somit entfällt die Lösungsmenge der einfachen Rotationsfrequenz, wenn das Feld senkrecht auf der Rotationsachse steht. Die Lösungsmenge der doppelten Rotationsfrequenz entfällt, wenn die Feldrichtung identisch der Rotationsachse (Knotenlinie) ist.

4.3.4 Zusammenfassung der Analyse der Bestimmbarkeit von Skalenwertfehlern

Die Analyse der Ableitung des Betrages nach den drei Eulerschen Winkel liefert für die Bestimmung der Skalenwerte die in der folgenden Tabelle zusammengefaßten Lösungsmengen:

Winkel		Gleichungen	Interpretation
φ	f_{Rot}	-	
	$2f_{\text{Rot}}$	$Sk_x^2 - Sk_y^2 = 0$ Ein Paar sich schneidender Ebenen	Skalenwerte in X und Y Richtung können aufeinander abgestimmt werden
ψ	f_{Rot}	$a_{11} Sk_x^2 + a_{22} Sk_y^2 + a_{33} Sk_z^2 = 0$ zwei um 90° verdrehte elliptische Doppelkegel, die sich in den Diagonalen des Koordinatensystems schneiden	Alle Skalenwerte können aufeinander abgestimmt werden
	$2f_{\text{Rot}}$	$a_{11} Sk_x^2 + a_{22} Sk_y^2 + a_{33} Sk_z^2 = 0$ zwei um 90° verdrehte elliptische Doppelkegel, die sich in den Diagonalen des Koordinatensystems schneiden	Alle Skalenwerte können aufeinander abgestimmt werden
ϑ	f_{Rot}	$Sk_x^2 - Sk_y^2 = 0$ Ein Paar sich schneidender Ebenen	Skalenwerte in X und Y Richtung können aufeinander abgestimmt werden
	$2f_{\text{Rot}}$	$a_{11} Sk_x^2 + a_{22} Sk_y^2 + a_{33} Sk_z^2 = 0$ zwei aufeinander fallende elliptische Doppelkegel, Lösungsmenge ist die Kegelmantelfläche	Skalenwerte können nicht aufeinander abgestimmt werden

Die auszuschließenden Feldbedingungen sind in folgender Tabelle zusammengefaßt:

Winkel		Gleichung	Interpretation
φ	f_{Rot}	-	-
	$2f_{\text{Rot}}$	$((B_x \sin \psi - B_y \cos \psi) \cos \vartheta - B_z \sin \vartheta) = 0$ und $(-B_x \cos \psi - B_y \sin \psi) = 0$	Feld parallel zur B_z -Richtung
ψ	f_{Rot}	$B_x = 0$ und $B_y = 0$ oder $B_z = 0$	Feld senkrecht oder parallel zur B_z -Richtung
	$2f_{\text{Rot}}$	$B_x = 0$ und $B_y = 0$	Feld parallel zur B_z -Richtung
ϑ	f_{Rot}	$(B_x \cos \psi + B_y \sin \psi) = 0$	Feld senkrecht zur Knotenlinie
	$2f_{\text{Rot}}$	$(B_x \sin \psi - B_y \cos \psi) = 0$ und $B_z = 0$	Feld parallel zur Knotenlinie

Mit Ausnahme der Rotation um eine Magnetometerachse (nur zwei Gleichungen für die doppelte Rotationsfrequenz) stehen immer vier Gleichungen zur Fehlerbestimmung zur Verfügung. Die Gleichungen sind jedoch nicht unabhängig voneinander. Als unabhängige

Lösungsmengen verbleiben ein Ebenen-Paar und drei Doppelkegel mit den Symmetrieachsen in Sk_x , Sk_y und Sk_z Richtung. Alle Lösungsmengen beinhalten die Diagonalen im Sk_x , Sk_y , Sk_z – Raum. Somit können gemeinsame Schnittmengen immer nur Raumdiagonalen, jedoch niemals Punkte sein. Daraus folgt, daß eine absolute Bestimmung der Skalenwerte ebenso wie die Bestimmung der Vorzeichen nicht möglich ist. Erreichbar ist lediglich eine Abstimmung der Skalenwerte untereinander.

Folgende Konsequenzen lassen sich ableiten:

- Bei der Bewegung um einen Freiheitsgrad lassen sich die Skalenwerte abstimmen, wenn die Rotationsachse nicht identisch einer Magnetometerachse ist (Rotation um φ). In diesem Fall lassen sich nur die Skalenwerte der Komponenten quer zur Rotationsachse bestimmen. Im Fall der Rotation um ψ reicht die Analyse einer Frequenz (der einfachen oder doppelten Rotationsfrequenz) bereits aus, um die Raumdiagonalen zu fixieren. Bei der Rotation um ϑ müssen sowohl die einfache als auch die doppelte Rotationsfrequenz ausgewertet werden, um die Lösungsmenge auf die Raumdiagonalen einzuengen.
- Die Bewegung um zwei oder drei Freiheitsgrade liefert keine weitere Einschränkung der Lösungsmenge. Sie liefert allerdings auch keinen Widerspruch, da die Raumdiagonalen Teilmenge aller Lösungen sind.
- Aus den auszuschließenden Feldbedingungen folgt, daß das Feld nicht Null und daß die Feldrichtung nicht identisch der Richtung der Rotationsachse sein darf. Ist diese Bedingung erfüllt, werden nicht abgestimmte Skalenwerte in jedem Fall zur doppelten Rotationsfrequenz im Betrag führen. Die einfache Rotationsfrequenz tritt nur auf, wenn das Feld senkrecht zur Rotationsachse ungleich Null ist und die Rotationsachse ungleich einer Magnetometerachse ist. Bei einer Drehung um zwei Freiheitsgrade können bei beliebiger Feldrichtung die Skalenwerte aufeinander abgestimmt werden, da die Richtung von mindestens einer Rotationsachse nicht mit der Feldrichtung übereinstimmen kann.

Die folgenden Abbildungen zeigen die Lösungsmengen grafisch.

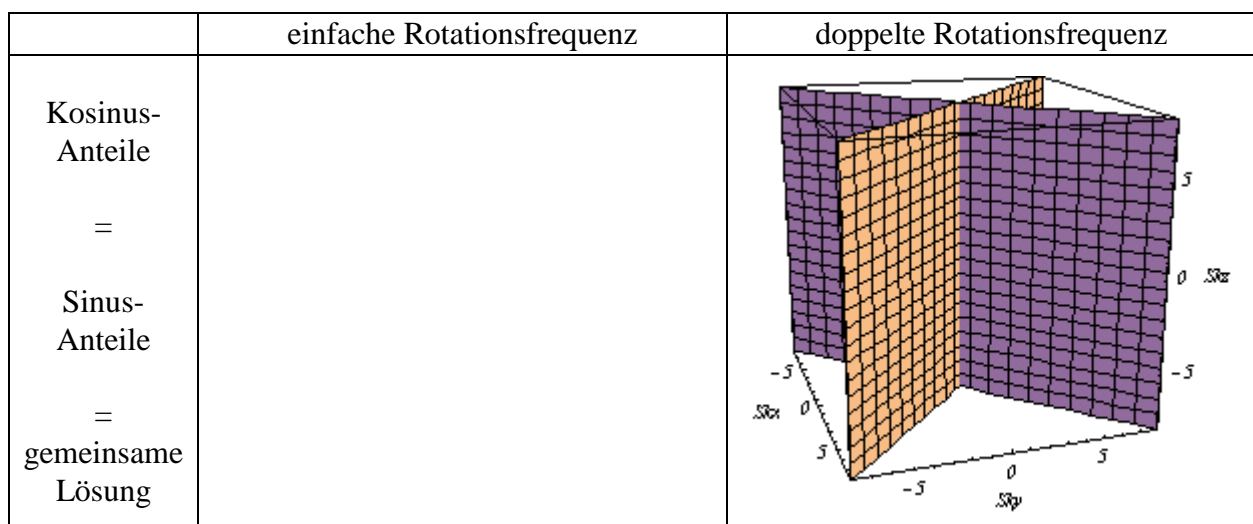


Abbildung 4-2: Grafische Darstellung der Lösungsmengen für die Skalenwertfehler in Abhängigkeit des Bewegungsfreiheitsgrades φ .

Gewählte Parameter:

$$\psi = 30^\circ$$

$$\vartheta = -40^\circ$$

$$B_x = -40\text{nT}$$

$$B_y = 20\text{nT}$$

$$B_z = 30\text{nT}$$

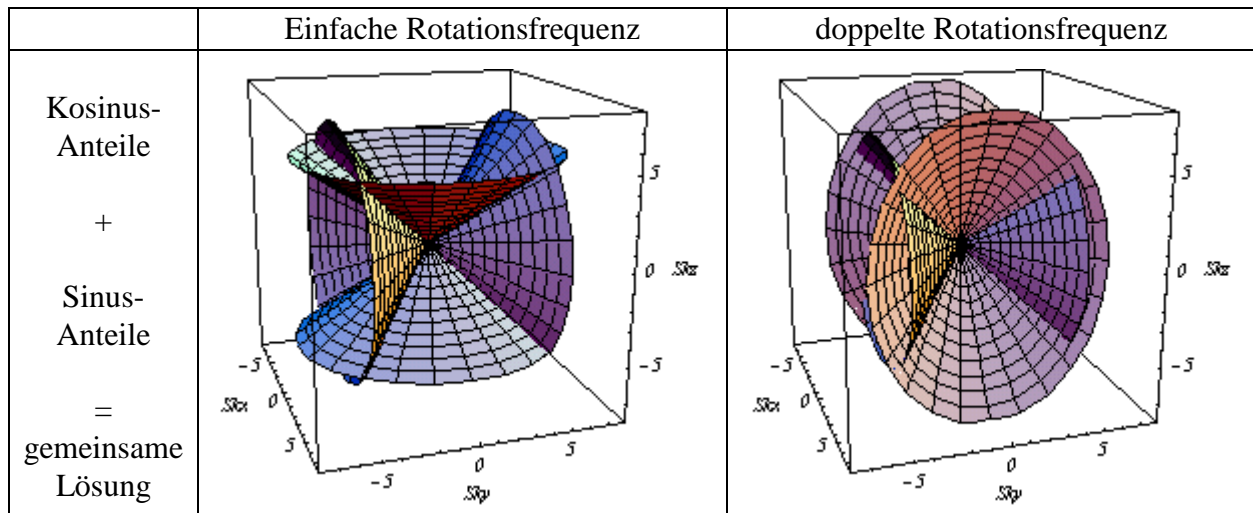


Abbildung 4-3 Grafische Darstellung der Lösungsmengen für die Skalenwertfehler in Abhängigkeit des Bewegungsfreiheitsgrades ψ .

Gewählte Parameter:

$$\varphi = 30^\circ$$

$$\vartheta = -40^\circ$$

$$B_x = -40\text{nT}$$

$$B_y = 20\text{nT}$$

$$B_z = 30\text{nT}$$

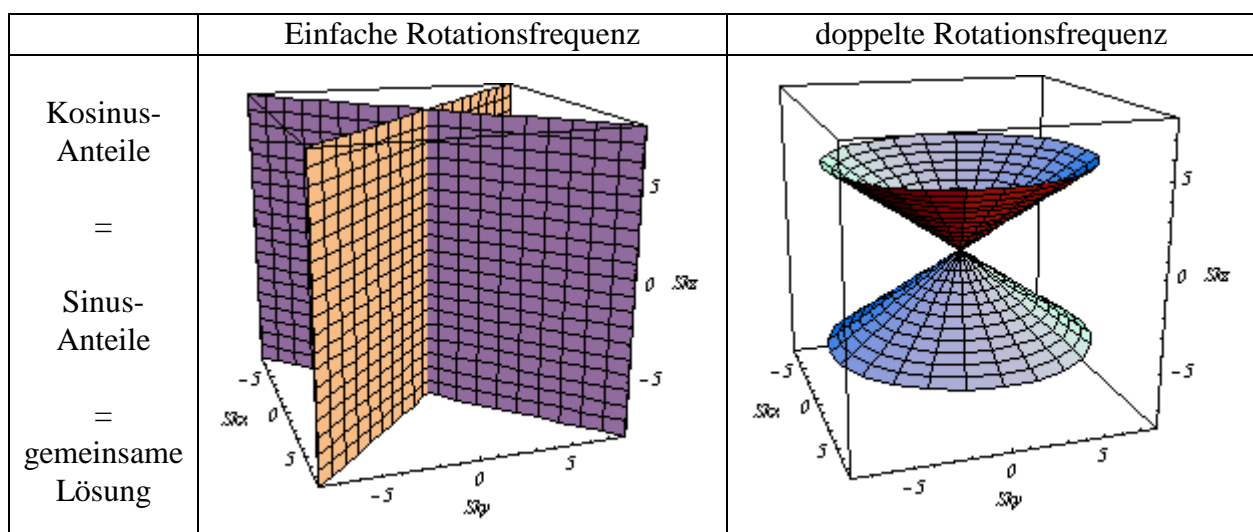


Abbildung 4-4 Grafische Darstellung der Lösungsmengen für die Skalenwertfehler in Abhängigkeit des Bewegungsfreiheitsgrades ϑ .

Gewählte Parameter:

$$\varphi = 30^\circ$$

$$\psi = -40^\circ$$

$$B_x = -40\text{nT}$$

$$B_y = 20\text{nT}$$

$$B_z = 30\text{nT}$$

4.4 Der Einfluß der Abweichung von der Orthogonalität

Betrachtet man ausschließlich die Abweichung von der Orthogonalität als Fehlerquelle, können die Skalenwerte gleich 1 und die Nullpunkte gleich 0 gesetzt werden. Somit berechnet sich das fehlerbehaftete (gemessene) Feld aus dem realen Feld wie folgt:

$$\begin{pmatrix} B_{RNx} \\ B_{RNy} \\ B_{RNz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ O_{xy} & 1 & 0 \\ O_{xz} & O_{yz} & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} B_{Rx} \\ B_{Ry} \\ B_{Rz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} B_{Rx} \\ O_{xy} B_{Rx} + B_{Ry} \\ O_{xz} B_{Rx} + O_{yz} B_{Ry} + B_{Rz} \end{pmatrix}$$

Für das Quadrat des Betrages folgt:

$$|\mathbf{B}_N|^2 = (B_{Rx})^2 + (O_{xy} B_{Rx} + B_{Ry})^2 + (O_{xz} B_{Rx} + O_{yz} B_{Ry} + B_{Rz})^2$$

Ersetzt man das Magnetfeld \mathbf{B}_R im Sensorsystem durch das Produkt von Rotationsmatrix \mathbf{R} und Magnetfeld \mathbf{B} im ortsfesten Koordinatensystem, ergibt sich folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} |\mathbf{B}_N|^2 &= [(\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \vartheta) B_x + (\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \cos \vartheta) B_y + (\sin \varphi \sin \vartheta) B_z]^2 \\ &+ \left[(\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \vartheta) O_{xy} B_x + (\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \cos \vartheta) O_{xy} B_y + (\sin \varphi \sin \vartheta) O_{xy} B_z \right. \\ &\quad \left. + (-\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi \cos \vartheta) B_x + (-\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \vartheta) B_y + (\cos \varphi \sin \vartheta) B_z \right]^2 \\ &+ \left[(\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \vartheta) O_{xz} B_x + (\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \cos \vartheta) O_{xz} B_y + (\sin \varphi \sin \vartheta) O_{xz} B_z \right. \\ &\quad \left. + (-\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi \cos \vartheta) O_{yz} B_x + (-\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \vartheta) O_{yz} B_y + (\cos \varphi \sin \vartheta) O_{yz} B_z \right. \\ &\quad \left. + (\sin \psi \sin \vartheta) B_x + (-\cos \psi \sin \vartheta) B_y + (\cos \vartheta) B_z \right]^2 \end{aligned}$$

Ausmultipliziert und gekürzt kann der Betrag wie folgt dargestellt werden:

$$\begin{aligned}
 8|\mathbf{B}_N|^2 = & 8 & (B_x^2 + B_y^2 + B_z^2) \\
 & + (O_{xy}^2 + O_{xz}^2 + O_{yz}^2) & (3B_x^2 + 3B_y^2 + 2B_z^2) \\
 & + \cos 2\vartheta (O_{xy}^2 + O_{xz}^2 + O_{yz}^2) & (B_x^2 + B_y^2 - 2B_z^2) \\
 & + \cos 2\psi (1 - \cos 2\vartheta) (O_{xy}^2 + O_{xz}^2 + O_{yz}^2) & (B_x^2 - B_y^2) \\
 & + \cos 2\varphi (1 - \cos 2\vartheta) (O_{xy}^2 + O_{xz}^2 - O_{yz}^2) & (B_x^2 + B_y^2 - 2B_z^2) \\
 & - 4 \sin 2\varphi \sin 2\psi \cos \vartheta (O_{xy}^2 + O_{xz}^2 - O_{yz}^2) & (B_x^2 - B_y^2) \\
 & + \cos 2\varphi \cos 2\psi (3 + \cos 2\vartheta) (O_{xy}^2 + O_{xz}^2 - O_{yz}^2) & (B_x^2 - B_y^2) \\
 & + 8 \sin 2\varphi \cos 2\psi \cos \vartheta (O_{xy}^2 + O_{xz}^2 - O_{yz}^2) & B_x B_y \\
 & + 2 \sin 2\psi (1 - \cos 2\vartheta) (O_{xy}^2 + O_{xz}^2 + O_{yz}^2) & B_x B_y \\
 & + 2 \cos 2\varphi \sin 2\psi (3 + \cos 2\vartheta) (O_{xy}^2 + O_{xz}^2 - O_{yz}^2) & B_x B_y \\
 & + 8 \sin 2\varphi \cos \psi \sin \vartheta (O_{xy}^2 + O_{xz}^2 - O_{yz}^2) & B_x B_z \\
 & - 4 \sin \psi \sin 2\vartheta (O_{xy}^2 + O_{xz}^2 + O_{yz}^2) & B_x B_z \\
 & + 4 \cos 2\varphi \sin \psi \sin 2\vartheta (O_{xy}^2 + O_{xz}^2 - O_{yz}^2) & B_x B_z \\
 & + 8 \sin 2\varphi \sin \psi \sin \vartheta (O_{xy}^2 + O_{xz}^2 - O_{yz}^2) & B_y B_z \\
 & + 4 \cos \psi \sin 2\vartheta (O_{xy}^2 + O_{xz}^2 + O_{yz}^2) & B_y B_z \\
 & - 4 \cos 2\varphi \cos \psi \sin 2\vartheta (O_{xy}^2 + O_{xz}^2 - O_{yz}^2) & B_y B_z \\
 & - 8 \cos 2\varphi \sin 2\psi \cos \vartheta (O_{xy} + O_{xz} O_{yz}) & (B_x^2 - B_y^2) \\
 & - 2 \sin 2\varphi (1 - \cos 2\vartheta) (O_{xy} + O_{xz} O_{yz}) & (B_x^2 + B_y^2 - 2B_z^2) \\
 & - 2 \sin 2\varphi \cos 2\psi (3 + \cos 2\vartheta) (O_{xy} + O_{xz} O_{yz}) & (B_x^2 - B_y^2) \\
 & + 8 \sin 2\psi \sin \vartheta (O_{xz} \cos \varphi - O_{yz} \sin \varphi) & (B_x^2 - B_y^2) \\
 & - 4 \sin 2\vartheta (O_{xz} \sin \varphi + O_{yz} \cos \varphi) & (B_x^2 + B_y^2 - 2B_z^2) \\
 & + 4 \cos 2\psi \sin 2\vartheta (O_{xz} \sin \varphi + O_{yz} \cos \varphi) & (B_x^2 - B_y^2) \\
 & + 16 \cos 2\varphi \cos 2\psi \cos \vartheta (O_{xy} + O_{xz} O_{yz}) & B_x B_y \\
 & - 4 \sin 2\varphi \sin 2\psi (3 + \cos 2\vartheta) (O_{xy} + O_{xz} O_{yz}) & B_x B_y \\
 & + 8 \sin 2\psi \sin 2\vartheta (O_{xz} \sin \varphi + O_{yz} \cos \varphi) & B_x B_y \\
 & - 16 \cos 2\psi \sin \vartheta (O_{xz} \cos \varphi - O_{yz} \sin \varphi) & B_x B_y \\
 & + 16 \cos 2\varphi \cos \psi \sin \vartheta (O_{xy} + O_{xz} O_{yz}) & B_x B_z \\
 & - 8 \sin 2\varphi \sin \psi \sin 2\vartheta (O_{xy} + O_{xz} O_{yz}) & B_x B_z \\
 & - 16 \sin \psi \cos 2\vartheta (O_{xz} \sin \varphi + O_{yz} \cos \varphi) & B_x B_z \\
 & + 16 \cos \psi \cos \vartheta (O_{xz} \cos \varphi - O_{yz} \sin \varphi) & B_x B_z \\
 & + 16 \cos 2\varphi \sin \psi \sin \vartheta (O_{xy} + O_{xz} O_{yz}) & B_y B_z \\
 & + 8 \sin 2\varphi \cos \psi \sin 2\vartheta (O_{xy} + O_{xz} O_{yz}) & B_y B_z \\
 & + 16 \cos \psi \cos 2\vartheta (O_{xz} \sin \varphi + O_{yz} \cos \varphi) & B_y B_z \\
 & + 16 \sin \psi \cos \vartheta (O_{xz} \cos \varphi - O_{yz} \sin \varphi) & B_y B_z
 \end{aligned}$$

4.4.1 Die Ableitung des Betrages nach φ

Sortiert man die Ableitung nach φ nach einfacher und doppelter Rotationsfrequenz sowie nach Sinus- und Kosinus-Anteilen, ergibt sich folgender Ausdruck:

$$\begin{aligned}
 \frac{d|\mathbf{B}_N|^2}{d\varphi} = & \frac{1}{4} \sin \varphi \left[\begin{array}{l} -8 \cos \psi \cos \vartheta \quad O_{xz} \quad B_x B_z \\ -8 \cos \psi \cos 2\vartheta \quad O_{yz} \quad B_y B_z \\ -8 \sin \psi \cos \vartheta \quad O_{xz} \quad B_y B_z \\ +8 \sin \psi \cos 2\vartheta \quad O_{yz} \quad B_x B_z \\ +8 \cos 2\psi \sin \vartheta \quad O_{xz} \quad B_x B_y \\ -4 \sin 2\psi \sin 2\vartheta \quad O_{yz} \quad B_x B_y \\ +2 \sin 2\vartheta \quad O_{yz} \quad (B_x^2 + B_y^2 - 2B_z^2) \\ -2 \cos 2\psi \sin 2\vartheta \quad O_{yz} \quad (B_x^2 - B_y^2) \\ -4 \sin 2\psi \sin \vartheta \quad O_{xz} \quad (B_x^2 - B_y^2) \end{array} \right] \\
 & + \frac{1}{4} \cos \varphi \left[\begin{array}{l} -8 \cos \psi \cos \vartheta \quad O_{yz} \quad B_x B_z \\ +8 \cos \psi \cos 2\vartheta \quad O_{xz} \quad B_y B_z \\ -8 \sin \psi \cos \vartheta \quad O_{yz} \quad B_y B_z \\ -8 \sin \psi \cos 2\vartheta \quad O_{xz} \quad B_x B_z \\ +8 \cos 2\psi \sin \vartheta \quad O_{yz} \quad B_x B_y \\ +4 \sin 2\psi \sin 2\vartheta \quad O_{xz} \quad B_x B_y \\ -2 \sin 2\vartheta \quad O_{xz} \quad (B_x^2 + B_y^2 - 2B_z^2) \\ +2 \cos 2\psi \sin 2\vartheta \quad O_{xz} \quad (B_x^2 - B_y^2) \\ -4 \sin 2\psi \sin \vartheta \quad O_{yz} \quad (B_x^2 - B_y^2) \end{array} \right] \\
 & + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \left[\begin{array}{l} -(1 - \cos 2\vartheta) \quad (O_{xy}^2 + O_{xz}^2 - O_{yz}^2) \quad (B_x^2 + B_y^2 - 2B_z^2) \\ + \cos 2\psi (3 + \cos 2\vartheta) \quad (O_{xy}^2 + O_{xz}^2 - O_{yz}^2) \quad (B_x^2 - B_y^2) \\ -2 \sin 2\psi (3 + \cos 2\vartheta) \quad (O_{xy}^2 + O_{xz}^2 - O_{yz}^2) \quad B_x B_y \\ -4 \sin \psi \sin 2\vartheta \quad (O_{xy}^2 + O_{xz}^2 - O_{yz}^2) \quad B_x B_z \\ +4 \cos \psi \sin 2\vartheta \quad (O_{xy}^2 + O_{xz}^2 - O_{yz}^2) \quad B_y B_z \\ +8 \sin 2\psi \cos \vartheta \quad (O_{xy} + O_{xz} O_{yz}) \quad (B_x^2 - B_y^2) \\ -16 \cos 2\psi \cos \vartheta \quad (O_{xy} + O_{xz} O_{yz}) \quad B_x B_y \\ -16 \cos \psi \sin \vartheta \quad (O_{xy} + O_{xz} O_{yz}) \quad B_x B_z \\ -16 \sin \psi \sin \vartheta \quad (O_{xy} + O_{xz} O_{yz}) \quad B_y B_z \end{array} \right] \\
 & + \frac{1}{4} \cos 2\varphi \left[\begin{array}{l} -4 \sin 2\psi \cos \vartheta \quad (O_{xy}^2 + O_{xz}^2 - O_{yz}^2) \quad (B_x^2 - B_y^2) \\ +8 \cos 2\psi \cos \vartheta \quad (O_{xy}^2 + O_{xz}^2 - O_{yz}^2) \quad B_x B_y \\ +8 \cos \psi \sin \vartheta \quad (O_{xy}^2 + O_{xz}^2 - O_{yz}^2) \quad B_x B_z \\ +8 \sin \psi \sin \vartheta \quad (O_{xy}^2 + O_{xz}^2 - O_{yz}^2) \quad B_y B_z \\ -2(1 - \cos 2\vartheta) \quad (O_{xy} + O_{xz} O_{yz}) \quad (B_x^2 + B_y^2 - 2B_z^2) \\ -2 \cos 2\psi (3 + \cos 2\vartheta) \quad (O_{xy} + O_{xz} O_{yz}) \quad (B_x^2 - B_y^2) \\ -4 \sin 2\psi (3 + \cos 2\vartheta) \quad (O_{xy} + O_{xz} O_{yz}) \quad B_x B_y \\ -8 \sin \psi \sin 2\vartheta \quad (O_{xy} + O_{xz} O_{yz}) \quad B_x B_z \\ +8 \cos \psi \sin 2\vartheta \quad (O_{xy} + O_{xz} O_{yz}) \quad B_y B_z \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Es treten Anteile der einfachen und doppelten Rotationsfrequenz auf. Da φ variabel gehalten wird, müssen die in eckigen Klammern stehenden Ausdrücke jeweils gleich Null sein. Es ergeben sich vier Gleichungen im O_{xy}, O_{xz}, O_{yz} – Raum. Unter Verwendung der in Abschnitt 4.1. vereinbarten Koeffizienten können die aus Anteilen der einfachen und doppelten Rotationsfrequenz resultierenden Gleichungen allgemein wie folgt dargestellt werden:

$$2a_2 O_{xz} + 2a_3 O_{yz} = 0 \quad (\text{einfache Rotationsfrequenz})$$

$$a_{11} O_{xy}^2 + a_{22} O_{xz}^2 + a_{33} O_{yz}^2 + 2a_1 (O_{xy} + O_{xz} O_{yz}) = 0 \quad (\text{doppelte Rotationsfrequenz})$$

Die Koeffizienten berechnen sich wie folgt:

$$a_2^S = B_x \cos \psi + B_y \sin \psi$$

$$a_3^S = -(B_x \sin \psi - B_y \cos \psi) \cos \vartheta + B_z \sin \vartheta$$

$$a_2^C = (B_x \sin \psi - B_y \cos \psi) \cos \vartheta - B_z \sin \vartheta$$

$$a_3^C = B_x \cos \psi + B_y \sin \psi$$

$$a_{11}^{2S} = a_{22}^{2S} = -8 \left((B_x \cos \psi + B_y \sin \psi)^2 - ((B_y \cos \psi - B_x \sin \psi) \cos \vartheta + B_z \sin \vartheta)^2 \right)$$

$$a_{33}^{2S} = 8 \left((B_x \cos \psi + B_y \sin \psi)^2 - ((B_y \cos \psi - B_x \sin \psi) \cos \vartheta + B_z \sin \vartheta)^2 \right)$$

$$a_1^{2S} = 16 (B_x \cos \psi + B_y \sin \psi) \left((-B_y \cos \psi + B_x \sin \psi) \cos \vartheta - B_z \sin \vartheta \right)$$

$$a_{11}^{2C} = a_{22}^{2C} = -8 (B_x \cos \psi + B_y \sin \psi) \left((-B_y \cos \psi + B_x \sin \psi) \cos \vartheta - B_z \sin \vartheta \right)$$

$$a_{33}^{2C} = 8 (B_x \cos \psi + B_y \sin \psi) \left((-B_y \cos \psi + B_x \sin \psi) \cos \vartheta - B_z \sin \vartheta \right)$$

$$a_1^{2C} = -4 \left((B_x \cos \psi + B_y \sin \psi)^2 - ((B_y \cos \psi - B_x \sin \psi) \cos \vartheta + B_z \sin \vartheta)^2 \right)$$

Die aus der einfachen Rotationsfrequenz resultierenden Gleichungen beschreiben Geraden in der O_{xz}, O_{yz} – Ebene. Da O_{xy} beliebig ist, handelt es sich bei den Lösungsmengen um Ebenen, die durch die Geraden in der O_{xz}, O_{yz} – Ebene und die O_{xy} – Achse festgelegt werden. Da beide Geraden durch den Nullpunkt der O_{xz}, O_{yz} – Ebene gehen, ist die gemeinsame Lösungsmenge die O_{xy} – Achse.

Die aus der doppelten Rotationsfrequenz resultierenden Gleichungen beschreiben Flächen zweiter Ordnung im O_{xy}, O_{xz}, O_{yz} – Raum. Wird die in Abschnitt 4.1. beschriebene Verschiebung in den Symmetriepunkt und die Drehung in die Hauptachsen auf die Flächen angewandt, erhält man die folgenden charakteristischen Parameter für die nun verschobenen und gedrehten aber einfacher zu interpretierenden Flächen im $O'_{xy}, O'_{xz}, O'_{yz}$ – Raum.

$$d_{11}^{S2} = -8 \left((B_x \cos \psi + B_y \sin \psi)^2 - ((B_y \cos \psi - B_x \sin \psi) \cos \vartheta + B_z \sin \vartheta)^2 \right)$$

$$d_{22}^{2S} = -8 \sqrt{4 (B_x \cos \psi + B_y \sin \psi)^2 ((B_y \cos \psi - B_x \sin \psi) \cos \vartheta + B_z \sin \vartheta)^2 + ((B_x \cos \psi + B_y \sin \psi)^2 - ((B_y \cos \psi - B_x \sin \psi) \cos \vartheta + B_z \sin \vartheta)^2)^2}$$

$$\begin{aligned}
d_{33}^{2S} &= 8 \sqrt{4(B_x \cos \psi + B_y \sin \psi)^2 ((B_y \cos \psi - B_x \sin \psi) \cos \vartheta + B_z \sin \vartheta)^2 + \\
&\quad ((B_x \cos \psi + B_y \sin \psi)^2 - ((B_y \cos \psi - B_x \sin \psi) \cos \vartheta + B_z \sin \vartheta)^2)^2} \\
b_0^{2S} &= 32 \frac{(B_x \cos \psi + B_y \sin \psi)^2 ((B_y \cos \psi - B_x \sin \psi) \cos \vartheta + B_z \sin \vartheta)^2}{(B_x \cos \psi + B_y \sin \psi)^2 - ((B_y \cos \psi - B_x \sin \psi) \cos \vartheta + B_z \sin \vartheta)^2} \\
d_{11}^{2C} &= 8(B_x \cos \psi + B_y \sin \psi) ((B_y \cos \psi - B_x \sin \psi) \cos \vartheta + B_z \sin \vartheta) \\
d_{22}^{2C} &= -4 \sqrt{4(B_x \cos \psi + B_y \sin \psi)^2 ((B_y \cos \psi - B_x \sin \psi) \cos \vartheta + B_z \sin \vartheta)^2 + \\
&\quad ((B_x \cos \psi + B_y \sin \psi)^2 - ((B_y \cos \psi - B_x \sin \psi) \cos \vartheta + B_z \sin \vartheta)^2)^2} \\
d_{33}^{2C} &= 4 \sqrt{4(B_x \cos \psi + B_y \sin \psi)^2 ((B_y \cos \psi - B_x \sin \psi) \cos \vartheta + B_z \sin \vartheta)^2 + \\
&\quad ((B_x \cos \psi + B_y \sin \psi)^2 - ((B_y \cos \psi - B_x \sin \psi) \cos \vartheta + B_z \sin \vartheta)^2)^2} \\
b_0^{2C} &= 2 \frac{((B_x \cos \psi + B_y \sin \psi)^2 - ((B_y \cos \psi - B_x \sin \psi) \cos \vartheta + B_z \sin \vartheta)^2)^2}{-(B_x \cos \psi + B_y \sin \psi)((B_y \cos \psi - B_x \sin \psi) \cos \vartheta + B_z \sin \vartheta)}
\end{aligned}$$

Da d_{22} negativ und d_{33} positiv ist und da d_{11} ein entgegengesetztes Vorzeichen zu b_0 hat, handelt es sich jeweils um ein einschaliges Hyperboloid. Beide Flächen müssen sich schneiden, da sie den Koordinatenursprung des Ausgangssystems gemeinsam haben. Die gemeinsame Lösung ist somit die Schnittkurve zweier Hyperboloide. In Abbildung 4-5 sind die Lösungsmengen grafisch dargestellt.

Keine Schnittkurven werden erzeugt (auszuschließende Lösung), wenn die Flächen aufeinanderfallen oder alle charakteristischen Parameter gleich Null sind.

Im Fall der Flächen, die aus der Abwesenheit der einfachen Rotationsfrequenz im Betrag hergeleitet wurden, müssen auf Grund des reziproken und vorzeichenverkehrten linearen Koeffizienten der Geradengleichungen die Geraden immer senkrecht aufeinander stehen. Sie können also nie aufeinander fallen. Zu vermeiden ist, daß Zähler und Nenner der linearen Koeffizienten gleich Null sind. Daraus folgt:

$$(B_x \cos \psi + B_y \sin \psi) = 0 \text{ und } ((B_x \sin \psi - B_y \cos \psi) \cos \vartheta - B_z \sin \vartheta) = 0$$

Die aus der doppelten Rotationsfrequenz hergeleiteten Doppelkegel fallen aufeinander, wenn die charakteristischen Parameter identisch sind. Da zwischen den charakteristischen Parametern d_{22} und d_{33} der Sinus- und Kosinus-Lösungen der Faktor 2 liegt, können die Flächen nur identisch sein, wenn d_{22} und d_{33} gleich Null sind. Das ist wiederum nur möglich, wenn die Summanden unter der Wurzel (beides Quadrate) gleich Null sind. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn gilt:

$$(B_x \cos \psi + B_y \sin \psi) = 0 \text{ und } ((B_x \sin \psi - B_y \cos \psi) \cos \vartheta - B_z \sin \vartheta) = 0$$

Somit ist die auszuschließende Lösung für die aus beiden Frequenzanteilen hergeleiteten Flächen identisch. Da $(B_x \cos \psi + B_y \sin \psi)$ die Projektion von B_x und B_y auf die Knotenlinie und $((B_x \sin \psi - B_y \cos \psi) \cos \vartheta - B_z \sin \vartheta)$ die Projektion der Feldkomponenten auf die in der Rotationsebene senkrecht zur Knotenlinie liegende Achse ist, sind die Parameter gleich Null, wenn die Feldrichtung gleich der Richtung der Rotationsachse ist.

4.4.2 Die Ableitung des Betrages nach ψ

Sortiert man die Ableitung nach ψ nach einfacher und doppelter Rotationsfrequenz sowie nach Sinus und Kosinus-Anteilen, ergibt sich folgender Ausdruck:

$$\begin{aligned}
 d|\mathbf{B}_N|^2 / d\psi = & \frac{1}{4} \sin \psi \begin{bmatrix} -8 \cos 2\vartheta & (O_{yz} \cos \varphi + O_{xz} \sin \varphi) & B_y B_z \\ -8 \cos \vartheta & (O_{xz} \cos \varphi - O_{yz} \sin \varphi) & B_x B_z \\ -8 \cos 2\varphi \sin \vartheta & (O_{xy} + O_{xz} O_{yz}) & B_x B_z \\ -4 \sin 2\varphi \sin \vartheta & (O_{xy}^2 + O_{xz}^2 - O_{yz}^2) & B_x B_z \\ -2 \sin 2\vartheta & (O_{xy}^2 + O_{xz}^2 + O_{yz}^2) & B_y B_z \\ +2 \cos 2\varphi \sin 2\vartheta & (O_{xy}^2 + O_{xz}^2 - O_{yz}^2) & B_y B_z \\ -4 \sin 2\varphi \sin 2\vartheta & (O_{xy} + O_{xz} O_{yz}) & B_y B_z \end{bmatrix} \\
 & + \frac{1}{4} \cos \psi \begin{bmatrix} -8 \cos 2\vartheta & (O_{yz} \cos \varphi + O_{xz} \sin \varphi) & B_x B_z \\ +8 \cos \vartheta & (O_{xz} \cos \varphi - O_{yz} \sin \varphi) & B_y B_z \\ +8 \cos 2\varphi \sin \vartheta & (O_{xy} + O_{xz} O_{yz}) & B_y B_z \\ +4 \sin 2\varphi \sin \vartheta & (O_{xy}^2 + O_{xz}^2 - O_{yz}^2) & B_y B_z \\ -2 \sin 2\vartheta & (O_{xy}^2 + O_{xz}^2 + O_{yz}^2) & B_x B_z \\ +2 \cos 2\varphi \sin 2\vartheta & (O_{xy}^2 + O_{xz}^2 - O_{yz}^2) & B_x B_z \\ -4 \sin 2\varphi \sin 2\vartheta & (O_{xy} + O_{xz} O_{yz}) & B_x B_z \end{bmatrix} \\
 & + \frac{1}{4} \sin 2\psi \begin{bmatrix} -16 \cos 2\varphi \cos \vartheta & (O_{xy} + O_{xz} O_{yz}) & B_x B_y \\ - (1 - \cos 2\vartheta) & (O_{xy}^2 + O_{xz}^2 + O_{yz}^2) & (B_x^2 - B_y^2) \\ - \cos 2\varphi (3 + \cos 2\vartheta) & (O_{xy}^2 + O_{xz}^2 - O_{yz}^2) & (B_x^2 - B_y^2) \\ -8 \sin 2\varphi \cos \vartheta & (O_{xy}^2 + O_{xz}^2 - O_{yz}^2) & B_x B_y \\ -2 \sin 2\varphi (3 + \cos 2\vartheta) & (O_{xy} + O_{xz} O_{yz}) & (B_x^2 - B_y^2) \\ +16 \sin \vartheta & (O_{xz} \cos \varphi - O_{yz} \sin \varphi) & B_x B_y \\ -4 \sin 2\vartheta & (O_{yz} \cos \varphi + O_{xz} \sin \varphi) & (B_x^2 - B_y^2) \end{bmatrix} \\
 & + \frac{1}{4} \cos 2\psi \begin{bmatrix} -8 \cos 2\varphi \cos \vartheta & (O_{xy} + O_{xz} O_{yz}) & (B_x^2 - B_y^2) \\ +2 (1 - \cos 2\vartheta) & (O_{xy}^2 + O_{xz}^2 + O_{yz}^2) & B_x B_y \\ +2 \cos 2\varphi (3 + \cos 2\vartheta) & (O_{xy}^2 + O_{xz}^2 - O_{yz}^2) & B_x B_y \\ -4 \sin 2\varphi \cos \vartheta & (O_{xy}^2 + O_{xz}^2 - O_{yz}^2) & (B_x^2 - B_y^2) \\ -4 \sin 2\varphi (3 + \cos 2\vartheta) & (O_{xy} + O_{xz} O_{yz}) & B_x B_y \\ +8 \sin \vartheta & (O_{xz} \cos \varphi - O_{yz} \sin \varphi) & (B_x^2 - B_y^2) \\ -8 \sin 2\vartheta & (O_{yz} \cos \varphi + O_{xz} \sin \varphi) & B_x B_y \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Es treten Anteile der einfachen und doppelten Rotationsfrequenz auf. Da ψ variabel gehalten wird, müssen die in eckigen Klammern stehenden Ausdrücke jeweils gleich Null sein. Es ergeben sich im O_{xy} , O_{xz} , O_{yz} - Raum vier quadratische Gleichungen der allgemeinen Form:

$$a_{11}O_{xy}^2 + a_{22}O_{xz}^2 + a_{33}O_{yz}^2 + 2a_1(O_{xz}O_{yz} + O_{xy}) + 2a_2O_{xz} + 2a_3O_{yz} = 0$$

Die Koeffizienten der vier Gleichungen berechnen sich wie folgt:

$$a_{11}^S = a_{22}^S = -8 \sin \varphi \sin \vartheta (B_x \cos \varphi + B_y \sin \varphi \cos \vartheta)$$

$$a_{33}^S = 4B_x \sin 2\varphi \sin \vartheta - 4B_y \cos^2 \varphi \sin 2\vartheta$$

$$a_1^S = -4B_x \cos 2\varphi \sin \vartheta - 2B_y \sin 2\varphi \sin 2\vartheta$$

$$a_2^S = -4B_x \cos \varphi \cos \vartheta - 4B_y \sin \varphi \cos 2\vartheta$$

$$a_3^S = 4B_x \sin \varphi \cos \vartheta - 4B_y \cos \varphi \cos 2\vartheta$$

$$a_{11}^C = a_{22}^C = -8 \sin \varphi \sin \vartheta (B_y \cos \varphi - B_x \sin \varphi \cos \vartheta)$$

$$a_{33}^C = 4B_y \sin 2\varphi \sin \vartheta + 4B_x \cos^2 \varphi \sin 2\vartheta$$

$$a_1^C = -4B_y \cos 2\varphi \sin \vartheta + 2B_x \sin 2\varphi \sin 2\vartheta$$

$$a_2^C = -4B_y \cos \varphi \cos \vartheta + 4B_x \sin \varphi \cos 2\vartheta$$

$$a_3^C = 4B_y \sin \varphi \cos \vartheta + 4B_x \cos \varphi \cos 2\vartheta$$

$$a_{11}^{2S} = a_{22}^{2S} = -8((B_x + B_y) \cos \varphi - (B_x - B_y) \cos \vartheta \sin \varphi)((B_x - B_y) \cos \varphi + (B_x + B_y) \cos \vartheta \sin \varphi)$$

$$a_{33}^{2S} = 8((B_x + B_y) \cos \varphi \cos \vartheta - (B_x - B_y) \sin \varphi)((B_x - B_y) \cos \varphi \cos \vartheta + (B_x + B_y) \sin \varphi)$$

$$a_1^{2S} = 2((B_x^2 - B_y^2)(3 + \cos 2\vartheta) \sin 2\varphi - 8B_x B_y \cos 2\varphi \cos \vartheta)$$

$$a_2^{2S} = -4 \sin \vartheta (2(B_x^2 - B_y^2) \sin \varphi \cos \vartheta - 4B_x B_y \cos \varphi)$$

$$a_3^{2S} = -4 \sin \vartheta (2(B_x^2 - B_y^2) \cos \varphi \cos \vartheta + 4B_x B_y \sin \varphi)$$

$$a_{11}^{2C} = a_{22}^{2C} = 8(B_x \cos \varphi + B_y \cos \vartheta \sin \varphi)(B_y \cos \varphi - B_x \cos \vartheta \sin \varphi)$$

$$a_{33}^{2C} = -8(B_x \cos \varphi \cos \vartheta + B_y \sin \varphi)(B_y \cos \varphi \cos \vartheta - B_x \sin \varphi)$$

$$a_1^{2C} = -2(2(B_x^2 - B_y^2) \cos 2\varphi \cos \vartheta + B_x B_y (3 + \cos 2\vartheta) \sin 2\varphi)$$

$$a_2^{2C} = 4 \sin \vartheta ((B_x^2 - B_y^2) \cos \varphi + 2B_x B_y \sin \varphi \cos \vartheta)$$

$$a_3^{2C} = -4 \sin \vartheta ((B_x^2 - B_y^2) \sin \varphi - 2B_x B_y \cos \varphi \cos \vartheta)$$

Die Gleichungen beschreiben Flächen zweiter Ordnung im O_{xy}, O_{xz}, O_{yz} – Raum. Wird die in Abschnitt 4.1. beschriebene Verschiebung in den Symmetriepunkt und die Drehung in die Hauptachsen auf die Flächen angewandt, erhält man die folgenden charakteristischen Parameter:

$$d_{11}^S = -8 \sin \varphi \sin \vartheta (B_x \cos \varphi + B_y \sin \varphi \cos \vartheta)$$

$$d_{22}^S = -2B_y \sin 2\vartheta - \sqrt{16B_x^2 \sin^2 \vartheta + 4B_y^2 \sin^2 2\vartheta}$$

$$d_{22}^S = -2B_y \sin 2\vartheta + \sqrt{16B_x^2 \sin^2 \vartheta + 4B_y^2 \sin^2 2\vartheta}$$

$$b_0^S = -4B_y \sin 2\vartheta + \frac{\sin \vartheta (B_x \cos 2\varphi + B_y \sin 2\varphi \cos \vartheta)^2}{\sin \varphi (B_x \cos \varphi + B_y \sin \varphi \cos \vartheta)}$$

$$\begin{aligned}
d_{11}^C &= -8 \sin \varphi \sin \vartheta (B_y \cos \varphi - B_x \sin \varphi \cos \vartheta) \\
d_{22}^C &= 2B_x \sin 2\vartheta - \sqrt{16B_y^2 \sin^2 \vartheta + 4B_x^2 \sin^2 2\vartheta} \\
d_{33}^C &= 2B_x \sin 2\vartheta + \sqrt{16B_y^2 \sin^2 \vartheta + 4B_x^2 \sin^2 2\vartheta} \\
b_0^C &= 4B_x \sin 2\vartheta + \frac{\sin \vartheta (B_y \cos 2\varphi - B_x \sin 2\varphi \cos \vartheta)^2}{\sin \varphi (B_y \cos \varphi - B_x \sin \varphi \cos \vartheta)} \\
d_{11}^{2S} &= -8((B_x + B_y) \cos \varphi - (B_x - B_y) \cos \vartheta \sin \varphi)((B_x - B_y) \cos \varphi + (B_x + B_y) \cos \vartheta \sin \varphi) \\
d_{22}^{2S} &= -4(B_x^2 - B_y^2) \sin^2 \vartheta - 4\sqrt{4(B_x^2 + B_y^2)^2 \cos^2 \vartheta + (B_x^2 - B_y^2)^2 \sin^4 \vartheta} \\
d_{33}^{2S} &= -4(B_x^2 - B_y^2) \sin^2 \vartheta + 4\sqrt{4(B_x^2 + B_y^2)^2 \cos^2 \vartheta + (B_x^2 - B_y^2)^2 \sin^4 \vartheta} \\
b_0^{2S} &= -8(B_x^2 - B_y^2) \sin^2 \vartheta + \\
&\quad \frac{((B_x^2 - B_y^2)(3 + \cos 2\vartheta) \sin 2\varphi - 8B_x B_y \cos \vartheta \cos 2\varphi)^2}{2((B_x + B_y) \cos \varphi - (B_x - B_y) \cos \vartheta \sin \varphi)((B_x - B_y) \cos \varphi + (B_x + B_y) \cos \vartheta \sin \varphi)} \\
d_{11}^{2C} &= 8(B_x \cos \varphi + B_y \cos \vartheta \sin \varphi)(B_y \cos \varphi - B_x \cos \vartheta \sin \varphi) \\
d_{22}^{2C} &= 4B_x B_y \sin^2 \vartheta - 4\sqrt{(B_x^2 + B_y^2)^2 \cos^2 \vartheta + (B_x B_y)^2 \sin^4 \vartheta} \\
d_{33}^{2C} &= 4B_x B_y \sin^2 \vartheta + 4\sqrt{(B_x^2 + B_y^2)^2 \cos^2 \vartheta + (B_x B_y)^2 \sin^4 \vartheta} \\
b_0^{2C} &= 8B_x B_y \sin^2 \vartheta - \frac{(2(B_x^2 - B_y^2) \cos 2\varphi \cos \vartheta + B_x B_y (3 + \cos 2\vartheta) \sin 2\varphi)^2}{2(B_x \cos \varphi + B_y \cos \vartheta \sin \varphi)(B_y \cos \varphi - B_x \cos \vartheta \sin \varphi)}
\end{aligned}$$

Die Parameter d_{22} und d_{33} werden bei allen vier Flächen hier durch die Wurzel dominiert. Der Ausdruck vor der Wurzel wird durch das Quadrat dieses Ausdruckes unterhalb der Wurzel kompensiert. Da unterhalb der Wurzel ein weiterer quadratischer Term addiert wird, ist der Wurzelausdruck in jedem Fall größer als der Ausdruck vor der Wurzel. Das Vorzeichen von d_{22} ist somit immer negativ, das von d_{33} ist immer positiv. Da für d_{11} und b_0 keine Aussage über das Vorzeichen gemacht werden kann, kommen ein einschaliges oder zweischaliges Hyperboloid als Fläche zweiter Ordnung in Frage. Die gemeinsame Lösung ist der Schnittpunkt dieser vier Flächen. Die Widerspruchsfreiheit ist gewährleistet, da in jedem Fall der Ursprung $O_{xy} = O_{xz} = O_{yz} = 0$ im O_{xy} , O_{xz} , O_{yz} – Raum eine gemeinsame Lösung aller Flächen ist. Eine weitere gemeinsame Punktlösung kann theoretisch nicht ausgeschlossen werden. In Abbildung 4-6 sind die Lösungsmengen grafisch dargestellt.

Bleibt die Frage nach der Unabhängigkeit der Lösungen.

Für die Flächen, die aus den Anteilen der einfachen Rotationsfrequenz entstanden sind, gilt: Substituiert man in den Parametern der Sinus-Lösung B_x durch B_y und B_y durch $-B_x$, erhält man die Parameter der Kosinus Lösung. Da $B_x = B_y$ und $B_x = -B_y$ nur für $B_x = B_y = 0$ gilt, sind beide Lösungen voneinander unabhängig. $B_x = B_y = 0$ ist die auszuschließende Lösung.

Ein Vergleich der Parametern d_{22} und d_{33} der aus der doppelten Rotationsfrequenz entstandenen Sinus- und Kosinus-Anteile zeigt die Unabhängigkeit auch dieser Lösungen. Eine Gleichheit der Parameter wird nur erreicht, wenn sowohl der Summand vor der Wurzel als auch der Ausdruck unter der Wurzel in Sinus- und Kosinus-Anteil identisch ist.

Aus:

$$\begin{aligned} -4(B_x^2 - B_y^2) \sin^2 \vartheta &= 4B_x B_y \sin^2 \vartheta \\ 4(B_x^2 + B_y^2)^2 \cos^2 \vartheta + (B_x^2 - B_y^2)^2 \sin^4 \vartheta &= (B_x^2 + B_y^2)^2 \cos^2 \vartheta + (B_x B_y)^2 \sin^4 \vartheta \end{aligned}$$

folgt:

$$3(B_x^2 + B_y^2)^2 \cos^2 \vartheta = 0 \quad \Rightarrow \quad B_x = B_y = 0 \quad \text{für } \cos^2 \vartheta \neq 0; \sin^2 \vartheta \neq 0$$

In den Fällen $\vartheta = 0^\circ$ und $\vartheta = 90^\circ$ wird die Nutation auf eine Rotation um eine Körperachse zurückgeführt (siehe Rotation um φ). Somit ist die Unabhängigkeit der Flächen mit Ausnahme der auszuschließenden Lösung ($B_x = B_y = 0$) gegeben.

4.4.3 Die Ableitung des Betrages nach ϑ

Sortiert man die Ableitung nach ϑ nach einfacher und doppelter Rotationsfrequenz sowie nach Sinus- und Kosinusanteilen, ergibt sich folgender Ausdruck:

$$\begin{aligned} d|\mathbf{B}_N|^2 / d\vartheta &= \frac{1}{4} \sin \vartheta \begin{bmatrix} -8 \cos 2\varphi \cos 2\psi & (O_{xy} + O_{xz} O_{yz}) & B_x B_y \\ -8 \cos \psi & (O_{xz} \cos \varphi - O_{yz} \sin \varphi) & B_x B_z \\ -4 \sin 2\varphi \cos 2\psi & (O_{xy}^2 + O_{xz}^2 - O_{yz}^2) & B_x B_y \\ -8 \sin \psi & (O_{xz} \cos \varphi - O_{yz} \sin \varphi) & B_y B_z \\ +4 \cos 2\varphi \sin 2\psi & (O_{xy} + O_{xz} O_{yz}) & (B_x^2 - B_y^2) \\ +2 \sin 2\varphi \sin 2\psi & (O_{xy}^2 + O_{xz}^2 - O_{yz}^2) & (B_x^2 - B_y^2) \end{bmatrix} \\ &+ \frac{1}{4} \cos \vartheta \begin{bmatrix} +8 \cos 2\varphi \cos \psi & (O_{xy} + O_{xz} O_{yz}) & B_x B_z \\ -8 \cos 2\psi & (O_{xz} \cos \varphi - O_{yz} \sin \varphi) & B_x B_y \\ +4 \sin 2\varphi \cos \psi & (O_{xy}^2 + O_{xz}^2 - O_{yz}^2) & B_x B_z \\ +8 \cos 2\varphi \sin \psi & (O_{xy} + O_{xz} O_{yz}) & B_y B_z \\ +4 \sin 2\varphi \sin \psi & (O_{xy}^2 + O_{xz}^2 - O_{yz}^2) & B_y B_z \\ +4 \sin 2\psi & (O_{xz} \cos \varphi - O_{yz} \sin \varphi) & (B_x^2 - B_y^2) \end{bmatrix} \\ &+ \frac{1}{4} \sin 2\vartheta \begin{bmatrix} - & (O_{xy}^2 + O_{xz}^2 - O_{yz}^2) & (B_x^2 + B_y^2 - 2B_z^2) \\ + \cos 2\varphi & (O_{xy}^2 + O_{xz}^2 - O_{yz}^2) & (B_x^2 + B_y^2 - 2B_z^2) \\ + \cos 2\psi & (O_{xy}^2 + O_{xz}^2 - O_{yz}^2) & (B_x^2 - B_y^2) \\ - \cos 2\varphi \cos 2\psi & (O_{xy}^2 + O_{xz}^2 - O_{yz}^2) & (B_x^2 - B_y^2) \\ -16 \cos \psi & (O_{xz} \sin \varphi + O_{yz} \cos \varphi) & B_y B_z \\ -2 \sin 2\varphi & (O_{xy} + O_{xz} O_{yz}) & (B_x^2 + B_y^2 - 2B_z^2) \\ +2 \sin 2\varphi \cos 2\psi & (O_{xy} + O_{xz} O_{yz}) & (B_x^2 - B_y^2) \\ +16 \sin \psi & (O_{xz} \sin \varphi + O_{yz} \cos \varphi) & B_x B_z \\ +2 \sin 2\psi & (O_{xy}^2 + O_{xz}^2 - O_{yz}^2) & B_x B_y \\ -2 \cos 2\varphi \sin 2\psi & (O_{xy}^2 + O_{xz}^2 - O_{yz}^2) & B_x B_y \\ +4 \sin 2\varphi \sin 2\psi & (O_{xy} + O_{xz} O_{yz}) & B_x B_y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{4} \cos 2\vartheta \begin{bmatrix} +4 \cos \psi & (O_{xy}^2 + O_{xz}^2 - O_{yz}^2) & B_y B_z \\ -4 \cos 2\varphi \cos \psi & (O_{xy}^2 + O_{xz}^2 - O_{yz}^2) & B_y B_z \\ -4 & (O_{xz} \sin \varphi + O_{yz} \cos \varphi) & (B_x^2 + B_y^2 - 2B_z^2) \\ +4 \cos 2\psi & (O_{xz} \sin \varphi + O_{yz} \cos \varphi) & (B_x^2 - B_y^2) \\ +8 \sin 2\varphi \cos \psi & (O_{xy} + O_{xz} O_{yz}) & B_y B_z \\ -4 \sin \psi & (O_{xy}^2 + O_{xz}^2 - O_{yz}^2) & B_x B_z \\ +4 \cos 2\varphi \sin \psi & (O_{xy}^2 + O_{xz}^2 - O_{yz}^2) & B_x B_z \\ -8 \sin 2\varphi \sin \psi & (O_{xy} + O_{xz} O_{yz}) & B_x B_z \\ +8 \sin 2\psi & (O_{xz} \sin \varphi + O_{yz} \cos \varphi) & B_x B_y \end{bmatrix}$$

Es treten Anteile der einfachen und doppelten Rotationsfrequenz auf. Da ϑ variabel gehalten wird, müssen die in eckigen Klammern stehenden Ausdrücke jeweils gleich Null sein. Es ergeben sich im O_{xy} , O_{xz} , O_{yz} - Raum vier quadratische Gleichungen der allgemeinen Form:

$$a_{11} O_{xy}^2 + a_{22} O_{xz}^2 + a_{33} O_{yz}^2 + 2a_1 (O_{xz} O_{yz} + O_{xy}) + 2a_2 O_{xz} + 2a_3 O_{yz} = 0$$

Die Koeffizienten der vier Gleichungen berechnen sich wie folgt:

$$a_{11}^S = a_{22}^S = -4 \sin 2\varphi (B_x \sin \psi - B_y \cos \psi)(B_x \cos \psi + B_y \sin \psi)$$

$$a_{33}^S = +4 \sin 2\varphi (B_x \sin \psi - B_y \cos \psi)(B_x \cos \psi + B_y \sin \psi)$$

$$a_1^S = -4 \cos 2\varphi (B_x \sin \psi - B_y \cos \psi)(B_x \cos \psi + B_y \sin \psi)$$

$$a_2^S = +4B_z \cos \varphi (B_x \cos \psi + B_y \sin \psi)$$

$$a_3^S = -4B_z \sin \varphi (B_x \cos \psi + B_y \sin \psi)$$

$$a_{11}^C = a_{22}^C = -2B_z \sin 2\varphi (B_x \cos \psi + B_y \sin \psi)$$

$$a_{33}^C = +2B_z \sin 2\varphi (B_x \cos \psi + B_y \sin \psi)$$

$$a_1^C = -2B_z \cos 2\varphi (B_x \cos \psi + B_y \sin \psi)$$

$$a_2^C = -2 \cos \varphi (B_x \sin \psi - B_y \cos \psi)(B_x \cos \psi + B_y \sin \psi)$$

$$a_3^C = +2 \sin \varphi (B_x \sin \psi - B_y \cos \psi)(B_x \cos \psi + B_y \sin \psi)$$

$$a_{11}^{2S} = a_{22}^{2S} = -8 \sin^2 \varphi ((B_x \sin \psi - B_y \cos \psi)^2 - B_z^2)$$

$$a_{33}^{2S} = -8 \cos^2 \varphi ((B_x \sin \psi - B_y \cos \psi)^2 - B_z^2)$$

$$a_1^{2S} = -4 \sin 2\varphi ((B_x \sin \psi - B_y \cos \psi)^2 - B_z^2)$$

$$a_2^{2S} = +16B_z \sin \varphi (B_x \sin \psi - B_y \cos \psi)$$

$$a_3^{2S} = +16B_z \cos \varphi (B_x \sin \psi - B_y \cos \psi)$$

$$a_{11}^{2C} = a_{22}^{2C} = +4B_z \sin^2 \varphi (B_x \sin \psi - B_y \cos \psi)$$

$$a_{33}^{2C} = +4B_z \cos^2 \varphi (B_x \sin \psi - B_y \cos \psi)$$

$$a_1^{2C} = +2B_z \sin 2\varphi (B_x \sin \psi - B_y \cos \psi)$$

$$a_2^{2C} = +2 \sin \varphi ((B_x \sin \psi - B_y \cos \psi)^2 - B_z^2)$$

$$a_3^{2C} = +2 \cos \varphi ((B_x \sin \psi - B_y \cos \psi)^2 - B_z^2)$$

Nach der Hauptachsentransformation erhält man die folgenden charakteristischen Parameter für die Flächen im $O'_{xy}, O'_{xz}, O'_{yz}$ – Raum:

$$\begin{aligned}d_{11}^S &= -4 \sin 2\varphi (B_x \sin \psi - B_y \cos \psi)(B_x \cos \psi + B_y \sin \psi) \\d_{22}^S &= -4 (B_x \sin \psi - B_y \cos \psi)(B_x \cos \psi + B_y \sin \psi) \\d_{33}^S &= +4 (B_x \sin \psi - B_y \cos \psi)(B_x \cos \psi + B_y \sin \psi) \\b_0^S &= +4 \frac{\cos^2 2\varphi}{\sin 2\varphi} (B_x \sin \psi - B_y \cos \psi)(B_x \cos \psi + B_y \sin \psi)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d_{11}^C &= -2B_z \sin 2\varphi (B_x \cos \psi + B_y \sin \psi) \\d_{22}^C &= -2B_z (B_x \cos \psi + B_y \sin \psi) \\d_{33}^C &= +2B_z (B_x \cos \psi + B_y \sin \psi) \\b_0^C &= +2B_z \frac{\cos^2 2\varphi}{\sin 2\varphi} (B_x \cos \psi + B_y \sin \psi)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d_{11}^{2S} &= -8 \sin^2 \varphi ((B_x \sin \psi - B_y \cos \psi)^2 - B_z^2) \\d_{22}^{2S} &= -8 ((B_x \sin \psi - B_y \cos \psi)^2 - B_z^2) \\d_{33}^{2S} &= 0 \\b_0^{2S} &= 8 \cos^2 \varphi ((B_x \sin \psi - B_y \cos \psi)^2 - B_z^2) + \left(\frac{32B_z^2 (B_x \sin \psi - B_y \cos \psi)^2}{(B_x \sin \psi - B_y \cos \psi)^2 - B_z^2} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d_{11}^{2C} &= +4B_z \sin^2 \varphi (B_x \sin \psi - B_y \cos \psi) \\d_{22}^{2C} &= +4B_z (B_x \sin \psi - B_y \cos \psi) \\d_{33}^{2C} &= 0 \\b_0^{2C} &= -4B_z \cos^2 \varphi (B_x \sin \psi - B_y \cos \psi) - \frac{((B_x \sin \psi - B_y \cos \psi) - B_z^2)^2}{B_z (B_x \sin \psi - B_y \cos \psi)}\end{aligned}$$

Analysiert man die charakteristischen Parameter, die durch die Anteile der einfachen Rotationsfrequenz erzeugt wurden, so haben die Parameter d_{11} und b_0 sowie d_{22} und d_{33} jeweils entgegengesetzte Vorzeichen. Somit handelt es sich sowohl für die Sinus- als auch für die Kosinus-Anteile um einschalige Hyperboloiden.

Im Gegensatz dazu haben die charakteristischen Parameter d_{11} und d_{22} der Flächen, die durch die doppelte Rotationsfrequenz erzeugt werden, gleiches Vorzeichen. Die Parameter d_{33} sind Null und b_0 hat ein entgegengesetztes Vorzeichen zu d_{11} und d_{22} . Somit sind diese Flächen zweiter Ordnung als elliptische Zylinder festgelegt.

In Abbildung 4-7 sind die Lösungsmengen grafisch dargestellt.

Gemeinsame Faktoren der Parameter der Sinus-Anteile der einfachen Rotationsfrequenz sind $(B_x \sin \psi - B_y \cos \psi)$ und $(B_x \cos \psi + B_y \sin \psi)$. Gemeinsame Faktoren der Parameter der Kosinus-Anteile der einfachen Rotationsfrequenz sind B_z und $(B_x \cos \psi + B_y \sin \psi)$. Sind also $(B_x \cos \psi + B_y \sin \psi)$ oder $(B_x \sin \psi - B_y \cos \psi)$ und B_z gleich Null, sind die Flächen nicht mehr definiert. Ebenfalls zu Null werden die charakteristischen Parameter der aus den Anteilen der

doppelten Rotationsfrequenz resultierenden Flächen, wenn sowohl B_z als auch $(B_x \sin\psi - B_y \cos\psi)$ gleich Null sind. In allen diesen Fällen ist das Gleichungssystem unabhängig von der Orthogonalitätsabweichung gelöst. Somit handelt es sich um eine auszuschließende Lösung. Im Fall $(B_x \cos\psi + B_y \sin\psi) = 0$ liegt das Feld senkrecht zur Rotationsachse. Im Fall $(B_x \sin\psi - B_y \cos\psi) = B_z = 0$ ist die Feldrichtung identisch der Richtung der Rotationsachse.

So verschwinden die Gleichungen für den Anteil an einfacher Rotationsfrequenz, wenn das Feld senkrecht zur Rotationsachse orientiert ist. Alle vier Gleichungen verschwinden, wenn die Feldrichtung identisch mit der Richtung der Rotationsachse ist.

4.4.4 Zusammenfassung der Analyse der Bestimmbarkeit von Orthogonalitätsfehlern

Die Analyse der Ableitung des Betrages nach den drei Eulerschen Winkeln liefert für die Bestimmung der Orthogonalitätsfehler die in der folgenden Tabelle zusammengefaßten Lösungsmengen.

Winkel		Gleichungen	Interpretation
φ	f_{Rot}	$2a_2 O_{xz} + 2a_3 O_{yz} = 0$ O_{xy} -Achse als Schnittgerade zweier senkrecht aufeinander stehenden Ebenen	O_{xz} und O_{yz} können bestimmt werden
	$2f_{\text{Rot}}$	$a_{11} O_{xy}^2 + a_{11} O_{xz}^2 + a_{33} O_{yz}^2 + 2a_1 (O_{xy} + O_{xz} O_{yz}) = 0$ Schnittkurve zweier einschaliger Hyperboloide	Orthogonalitätsfehler kann bestimmt werden
ψ	f_{Rot}	$a_{11} O_{xy}^2 + a_{11} O_{xz}^2 + a_{33} O_{yz}^2 + 2a_1 (O_{xz} O_{yz} + O_{xy}) + 2a_2 O_{xz} + 2a_3 O_{yz} = 0$ Schnittkurve zweier ein- oder zweischaliger Hyperboloide	Orthogonalitätsfehler kann bestimmt werden
	$2f_{\text{Rot}}$	$a_{11} O_{xy}^2 + a_{11} O_{xz}^2 + a_{33} O_{yz}^2 + 2a_1 (O_{xz} O_{yz} + O_{xy}) + 2a_2 O_{xz} + 2a_3 O_{yz} = 0$ Schnittkurve zweier ein- oder zweischaliger Hyperboloide	Orthogonalitätsfehler kann bestimmt werden
ϑ	f_{Rot}	$a_{11} O_{xy}^2 + a_{11} O_{xz}^2 + a_{33} O_{yz}^2 + 2a_1 (O_{xz} O_{yz} + O_{xy}) + 2a_2 O_{xz} + 2a_3 O_{yz} = 0$ Schnittkurve zweier einschaliger Hyperboloide	Orthogonalitätsfehler kann bestimmt werden
	$2f_{\text{Rot}}$	$a_{11} O_{xy}^2 + a_{11} O_{xz}^2 + a_{33} O_{yz}^2 + 2a_1 (O_{xz} O_{yz} + O_{xy}) + 2a_2 O_{xz} + 2a_3 O_{yz} = 0$ Schnittkurve zweier elliptischer Zylinder	Orthogonalitätsfehler kann bestimmt werden

Die auszuschließenden Feldbedingungen sind in folgender Tabelle zusammengefaßt:

Winkel		Gleichung	Interpretation
φ	f_{Rot}	$(B_x \cos \psi + B_y \sin \psi) = 0$ und $((B_x \sin \psi - B_y \cos \psi) \cos \vartheta - B_z \sin \vartheta) = 0$	Feld parallel zur B_{Rz} -Richtung
	$2f_{\text{Rot}}$	$(B_x \cos \psi + B_y \sin \psi) = 0$ und $((B_x \sin \psi - B_y \cos \psi) \cos \vartheta - B_z \sin \vartheta) = 0$	Feld parallel zur B_{Rz} -Richtung
ψ	f_{Rot}	$B_x = 0$ und $B_y = 0$	Feld parallel zur B_z -Richtung
	$2f_{\text{Rot}}$	$B_x = 0$ und $B_y = 0$	Feld parallel zur B_z -Richtung
ϑ	f_{Rot}	$(B_x \sin \psi - B_y \cos \psi) = 0$ und $B_z = 0$ oder $(B_x \cos \psi + B_y \sin \psi) = 0$	Feld parallel oder senkrecht zur Knotenlinie (Sonderfall, da X-Achse als fehlerfrei angenommen)
	$2f_{\text{Rot}}$	$(B_x \sin \psi - B_y \cos \psi) = 0$ und $B_z = 0$	Feld parallel zur Knotenlinie

Orthogonalitätsfehler bewirken sowohl das Auftreten der einfachen als auch der doppelten Rotationsfrequenz im Betrag. Somit stehen pro Rotation vier Gleichungen zur Fehlerbestimmung zur Verfügung. Jede Gleichung liefert als Lösungsmenge eine Fläche im O_{xy} , O_{xz} , O_{yz} -Raum. Abgesehen von den auszuschließenden Feldbedingungen sind die Flächen voneinander unabhängig. Daraus folgt, daß eine absolute Bestimmung der Orthogonalitätsabweichung mit Hilfe von drei Flächen möglich ist.

Folgende Konsequenzen lassen sich ableiten:

- Schon bei der Bewegung um einen Freiheitsgrad lassen sich die Orthogonalitätsfehler bestimmen. Sinus- und Kosinus-Anteile liefern voneinander unabhängige Flächen als Lösungsmengen, so daß bei einer gemeinsamen Analyse Schnittkurven beider Flächen entstehen. Analysiert man Rotationsfrequenz und doppelte Rotationsfrequenz gemeinsam, so engt sich die Lösungsmenge auf die Schnittpunkte der Schnittkurven ein. Das System ist einfach überbestimmt. Ein Schnittpunkt - der Koordinatenursprung - ist Bestandteil jeder Lösungsmenge. Theoretisch können mehrere Schnittpunkte auftreten. Da jedoch der Erwartungsbereich der Lösung in Praxis eng begrenzt ist (um Null herum), läßt sich der Orthogonalitätsfehler praktisch mit jeder Rotation bestimmen.
- Die Bewegung um zwei oder drei Freiheitsgrade erhöht den Grad der Überbestimmtheit. Sie liefert keinen Widerspruch, da der Koordinatenursprung $O_{xy} = O_{xz} = O_{yz} = 0$ Teilmenge aller Lösungen ist.
- Aus den auszuschließenden Feldbedingungen folgt, daß das Feld nicht Null und daß die Feldrichtung nicht identisch der Richtung der Rotationsachse sein darf. Mit der Einführung einer zweiten Bewegung kann das Eintreten einer für die Fehlerbestimmung auszuschließenden Feldbedingungen vermieden werden, da die Richtung des Feldes maximal mit der Richtung einer Rotationsachse übereinstimmen kann.

Die folgenden Abbildungen zeigen die Lösungsmengen grafisch.

Rotation um φ :

Die Lösungsmengen der Spektralanteile der einfachen Rotationsfrequenz sind zwei sich schneidende Ebenen. Die Lösungsmengen der Spektralanteile der doppelten Rotationsfrequenz sind zwei sich schneidende einschalige Hyperboloide. Die gemeinsame Lösung von drei Gleichungen ist der Koordinatenursprung $O_{xy} = O_{xz} = O_{yz} = 0$.

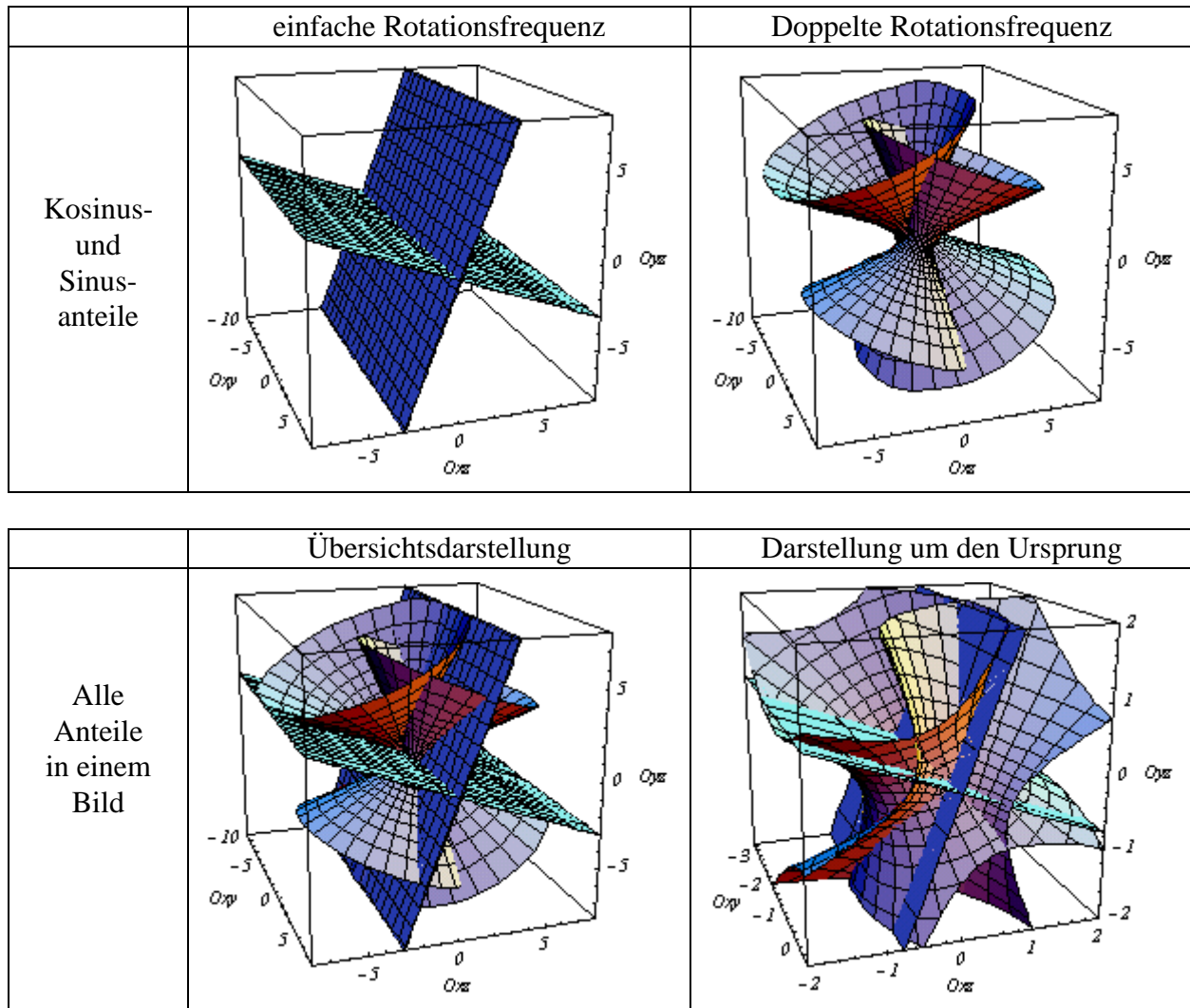


Abbildung 4-5 Grafische Darstellung der Lösungsmengen für die Orthogonalitätsfehler in Abhängigkeit des Bewegungsfreiheitsgrades φ .

Gewählte Parameter:

$$\psi = 30^\circ$$

$$\vartheta = -40^\circ$$

$$B_x = -40nT$$

$$B_y = 20nT$$

$$B_z = 30nT$$

Rotation um ψ :

Die Lösungsmengen der Spektralanteile sowohl der einfachen als auch der doppelten Rotationsfrequenz sind jeweils ein einschaliger und ein zweisechaliger Hyperboloid. Die gemeinsame Lösung von drei Eichgleichungen ist der Koordinatenursprung $O_{xy} = O_{xz} = O_{yz} = 0$.

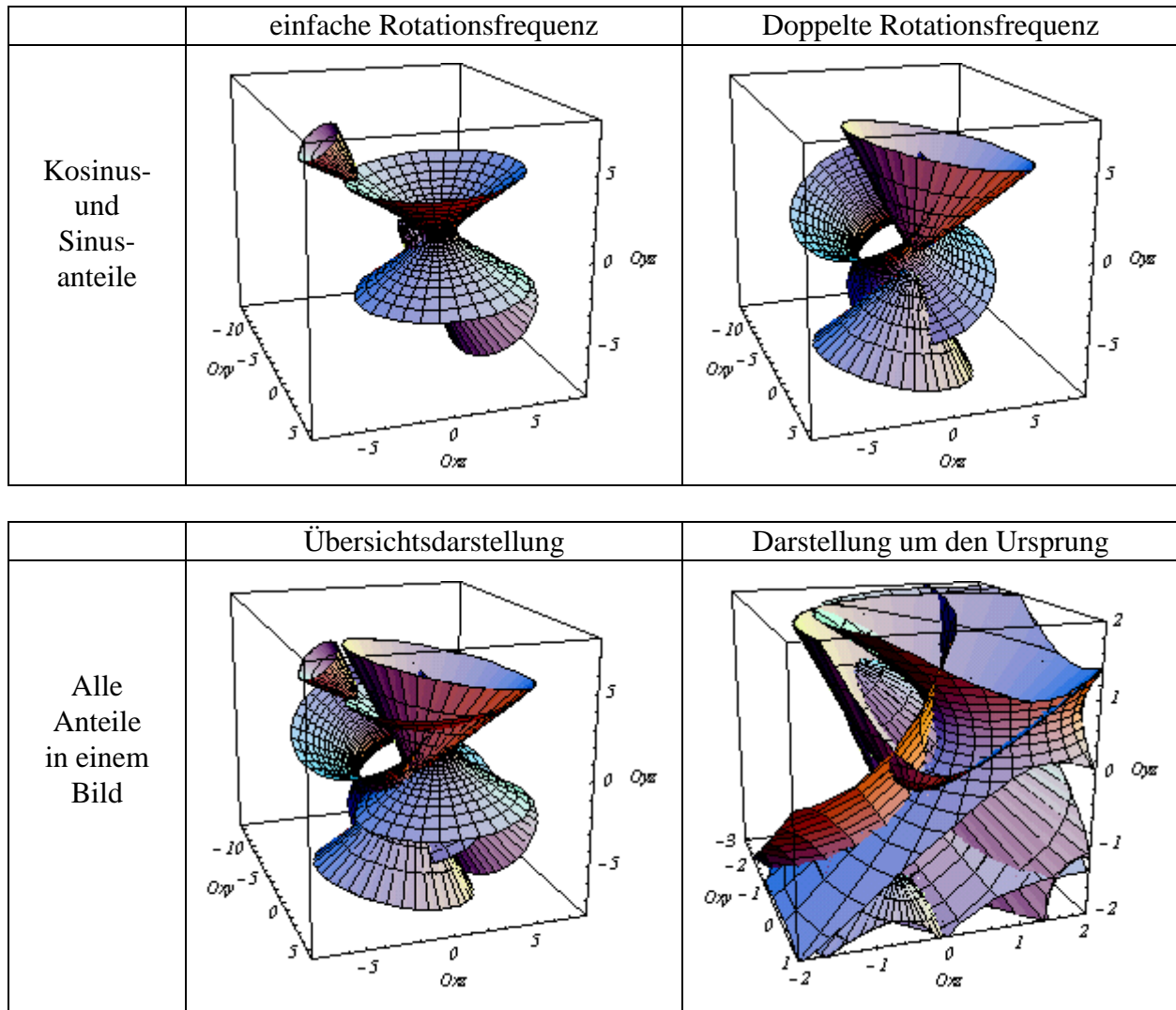


Abbildung 4-6 Grafische Darstellung der Lösungsmengen für die Orthogonalitätsfehler in Abhängigkeit des Bewegungsfreiheitsgrades ψ .

Gewählte Parameter:

$$\varphi = 30^\circ$$

$$\vartheta = -40^\circ$$

$$B_x = -40\text{nT}$$

$$B_y = 20\text{nT}$$

$$B_z = 30\text{nT}$$

Rotation um ϑ :

Die Lösungsmengen der Spektralanteile der einfachen Rotationsfrequenz sind zwei sich schneidende einschalige Hyperboloide. Die Lösungsmengen der Spektralanteile der doppelten Rotationsfrequenz sind zwei sich schneidende elliptische Zylinder. Die gemeinsame Lösung von drei Gleichungen ist der Koordinatenursprung $O_{xy} = O_{xz} = O_{yz} = 0$.

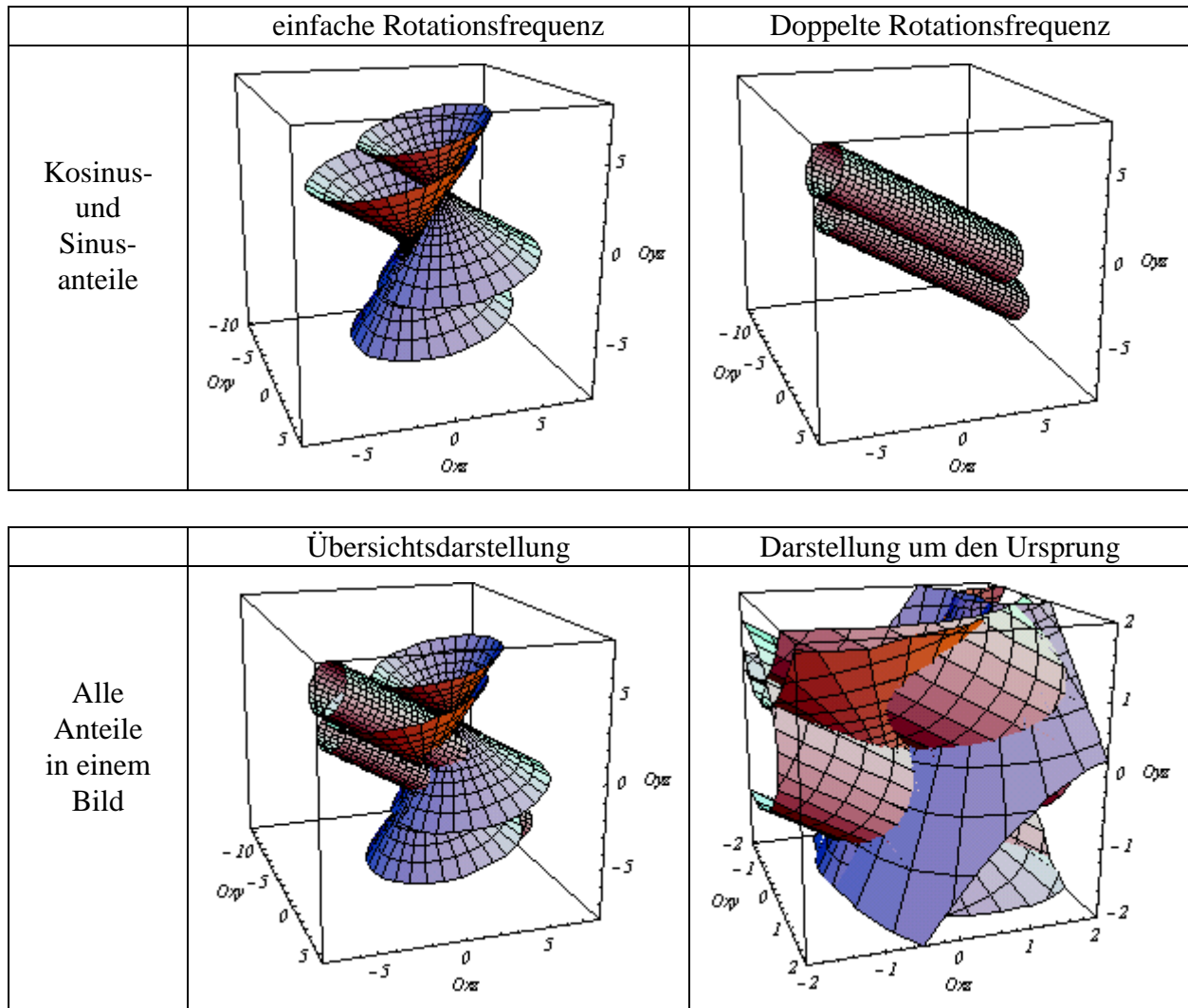


Abbildung 4-7 Grafische Darstellung der Lösungsmengen für die Orthogonalitätsfehler in Abhängigkeit des Bewegungsfreiheitsgrades ϑ .

Gewählte Parameter:

$$\varphi = 30^\circ$$

$$\psi = -40^\circ$$

$$B_x = -40nT$$

$$B_y = 20nT$$

$$B_z = 30nT$$

5 Überprüfung an Beispielen

Die Bestimmung der Meßfehler soll in diesem Abschnitt mit Hilfe der Betragsanalyse realer Meßreihen erfolgen. Analysiert wird die Differenz zwischen realem Betrag und dem Betrag, der sich aus den Meßwerten und angenommenen Fehlern berechnet. Unter Benutzung der in Abschnitt 3 eingeführten Variablen ergibt sich die Differenz wie folgt:

$$\Delta B_i^2 = |\mathbf{B}_{Ni}|^2 - |\mathbf{B}|^2 = [\mathbf{O}_N * \mathbf{S}_N * (\mathbf{B}_{Mi} - \mathbf{N}_N)]^T [\mathbf{O}_N * \mathbf{S}_N * (\mathbf{B}_{Mi} - \mathbf{N}_N)] - |\mathbf{B}|^2$$

Die Variable „i“ steht für die Nummer des Meßwertes, der während der Bewegung des Sensors aufgenommen wurde.

Da die Betragsdifferenz zwischen gemessenen und realen Feldwerten ausschließlich durch Fehler in der Magnetfeldmessung (physikalischen Fehler) erzeugt wird, ist die Varianz σ^2 minimal wenn sich angenommener und physikalischer Fehler kompensieren. Die Varianz des Betrages berechnet sich wie folgt:

$$\sigma^2 = \sum_i (\Delta B_i^2)^2$$

In einer Minimum - Varianz - Analyse werden die angenommenen (numerischen) Fehler (\mathbf{N}_N , \mathbf{S}_N und \mathbf{O}_N) variiert, bis der Einfluß der Bewegung auf den Betrag minimiert ist. Der Betrag des realen Feldes kann bekannt sein oder als konstant angenommen werden. Im zweiten Fall erhöht sich die Anzahl der Variablen um eins.

Zur Minimum Varianz Analyse wird ein kommerzielles FORTRAN Programm (fumili) genutzt. Findet das Programm ein Minimum, werden für diesen Punkt die Variablen und die Varianz des Betrages ausgegeben. Um die Empfindlichkeit der Varianz auf die einzelnen Fehler zu testen, wird die Varianz als Funktion der Abweichung der einzelnen Fehler vom fehlerfreien Fall dargestellt.

Es standen insgesamt vier Magnetometer zu Testzwecken zur Verfügung. Zwei Magnetometer (für die Raumstation MIR und für das Forschungsschiff Polarstern) sind für Messungen im Erdfeld ausgelegt. Der Sensor eines Magnetometers für die Cluster 2 Mission wurde im Anschluß an die Standardkalibrierung in den Meßeinrichtungen der TU-Braunschweig in Magnetsrode mittels Drehung im reduzierten Feld getestet. Als viertes Magnetometer diente das Flugmuster auf dem rotierenden Satelliten Equator-S. Die im Apogäum gewonnenen Daten wurden zur „inflight“ Kalibrierung genutzt. Bei den Erdfeldmagnetometern war der Betrag des äußeren Feldes durch parallele Messungen mit einem Protonenmagnetometer bekannt. Bei den im reduzierten Feld getesteten Magnetometern wurde der Betrag des äußeren Feldes als konstant angenommen.

5.1 Kalibrierung eines Magnetometers mittels freier Sensorbewegung

Die vorangegangene Analyse der Einflüsse der Fehlergruppen auf den Betrag zeigt, daß die Lösungsmengen separat eingeführter Fehler voneinander unabhängig sind.

Nullpunkte verursachen im Betrag ausschließlich Spektralanteile der einfachen Rotationsfrequenz. Die Lösungsmengen für die Sinus- und Kosinusanteile sind senkrecht aufeinander stehende Flächen. Auch wenn die Lage der Flächen vom äußeren Feld abhängt, so ist die Schnittgerade von Sinus- und Kosinuslösung nicht vom Feld abhängig. Es handelt sich jeweils um die Rotationsachse. Eine weitere Messung bei geändertem äußeren Feld würde keine neue Lösung liefern.

Die Lösungsmengen der Skalenwerte sind Flächenpaare oder Kegel. Es treten Lösungen sowohl in den spektralen Anteilen der einfachen als auch der doppelten Rotationsfrequenz auf. Sinus- und Kosinus Lösungen liefern jeweils identische Lösungsmengen. Die gemeinsame Lösungsmenge von einfacher und doppelter Rotationsfrequenz sind Raumdiagonalen. Diese Lösungsmenge ist unabhängig von der Rotationsachse. Somit fallen die Lösungen der Rotation um alle drei Winkel aufeinander. Die Lösungsmenge der Raumdiagonalen läßt sich weder durch Variation der Bewegung noch durch ein verändertes Feld weiter einengen. Somit können nur die Verhältnisse Sk_x / Sk_y , Sk_y / Sk_z bestimmt werden. Die Orthogonalitätsabweichung erzeugt sowohl Anteile der einfachen als auch der doppelten Rotationsfrequenz im Betrag. Alle Lösungsmengen sind voneinander unabhängig. Sowohl Sinus- und Kosinusanteile, einfache und doppelte Rotationsfrequenz als auch die Änderung der Rotationsachse liefern eigenständige Flächen zweiter Ordnung (ein oder zweischalige Hyperboloiden bzw. Zylinder). Weiterhin sind die Lösungsmengen vom Feldvektor abhängig. Somit würde man bei einem veränderten äußeren Feld einen neuen Satz Gleichungen für die Bestimmung der Orthogonalitätsabweichung erhalten.

In der folgenden Tabelle sind die aus den drei Rotationen gewonnenen Gleichungen und die darin enthaltenen Variablen zusammengefaßt.

spektraler Bestandteil (Gleichungen)	Abhängigkeit der Fehler (Variablen)
$Sin(\varphi)$	N_x, N_y, O_{xz}, O_{yz}
$Cos(\varphi)$	N_x, N_y, O_{xz}, O_{yz}
$Sin(2\varphi)$	$Sk_x / Sk_y, O_{xy}, O_{xz}, O_{yz}$
$Cos(2\varphi)$	$Sk_x / Sk_y, O_{xy}, O_{xz}, O_{yz}$
$Sin(\psi)$	$N_x / N_y, N_y / N_z, Sk_x / Sk_y, Sk_y / Sk_z, O_{xy}, O_{xz}, O_{yz}$
$Cos(\psi)$	$N_x / N_y, N_y / N_z, Sk_x / Sk_y, Sk_y / Sk_z, O_{xy}, O_{xz}, O_{yz}$
$Sin(2\psi)$	$Sk_x / Sk_y, Sk_y / Sk_z, O_{xy}, O_{xz}, O_{yz}$
$Cos(2\psi)$	$Sk_x / Sk_y, Sk_y / Sk_z, O_{xy}, O_{xz}, O_{yz}$
$Sin(\vartheta)$	$N_x, N_y / N_z, Sk_x / Sk_y, O_{xy}, O_{xz}, O_{yz}$
$Cos(\vartheta)$	$N_x, N_y / N_z, Sk_x / Sk_y, O_{xy}, O_{xz}, O_{yz}$
$Sin(2\vartheta)$	$Sk_x / Sk_y, Sk_y / Sk_z, O_{xy}, O_{xz}, O_{yz}$
$Cos(2\vartheta)$	$Sk_x / Sk_y, Sk_y / Sk_z, O_{xy}, O_{xz}, O_{yz}$

Für die Bestimmung der acht Variablen $N_x, N_y, N_z, Sk_x / Sk_y, Sk_y / Sk_z, O_{xy}, O_{xz}, O_{yz}$ stehen 12 Gleichungen zur Verfügung. Somit sind bei einer Bewegung um drei Freiheitsgrade die Variablen überbestimmt. Eine Widerspruchsfreiheit ist gewährleistet, da jede Gleichung

gelöst ist, wenn alle Variablen gleich Null sind. Daraus folgt, daß sich die Fehlergrößen bei einem bewegten Sensor durch eine Betragsanalyse eindeutig bestimmen lassen. Im Erdfeld wurden das Polarstern- und das MIR-Magnetometer gedreht. Hierzu wurde ein feldhomogener Raum in einer eisenfreien Hütte in den Meßeinrichtungen der Magson GmbH in Jeserigerhütten genutzt. Der Innenraum ist magnetisch vermessen, die Absolutfeldstärke durch Messungen mit einem Protonenmagnetometer bekannt und es steht eine zeitgleich laufende Registrierung der Erdfeldvariationen zur Verfügung. Die Sensoren wurden oberhalb eines Pfeilers relativ zum Erdfeld bewegt (siehe Abbildung 5-1).



Abbildung 5-1: *Polarsternmagnetometer auf einem Pfeiler in Jeserigerhütten*



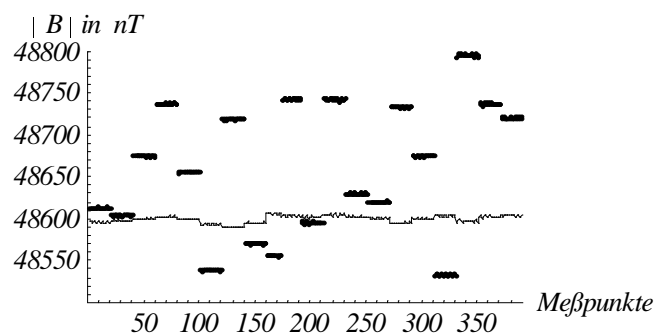
Abbildung 5-2: *Fluxgate Sensor für das Magnetometer auf der MIR Station*

In dem wasserdichten Zylinder des Polarstern-Magnetometers ist sowohl der vektorkompensierte Fluxgate Sensor als auch die zugehörige Digitalmagnetometerelektronik untergebracht. Lediglich eine serielle Schnittstelle und die Betriebsspannungsversorgung werden nach außen geführt. Der Meßbereich ($\pm 60.000\text{nT}$) und die Datenübertragungsrate (1Vektor/s) sind identisch für das Polarstern- und das MIR-Magnetometer. Das Sensordesign des MIR-Magnetometers basiert auf einer Entwicklung für die Kometenmission Rosetta. Da die zur Verfügung stehende Masse begrenzt war, mußte das Kompensationsspulensystem aus freitragenden Spulenringen gefertigt werden (siehe Abb. 5-2). Der Durchmesser des äußeren Helmholtzsystems beträgt 4cm. Die Masse des Sensors liegt unterhalb von 50g.

Um Einflüsse des dynamischen Verhaltens der Magnetometer auszuschließen wurde die Bewegung in Intervallen vollzogen. Es wurden nur die Daten in den ruhenden Phasen ausgewertet. Bei beiden Magnetometern konvergiert die Minimum-Varianz Analyse problemlos und führt bei wiederholten Messungen zu identischen Ergebnissen. Die Standardabweichung des korrigierten Betrages unterscheidet sich jedoch. Nach der Kompensation der Fehler wird beim Polarstern-Magnetometer eine Standardabweichung von einem Nanotesla erreicht. Beim MIR - Magnetometer wird im Konvergenzfall eine Standardabweichung von 4nT erreicht. Da unterschiedliche Meßbedingungen als Ursache auszuschließen sind, müssen beim MIR - Magnetometer Fehler zum tragen kommen, die nicht durch die behandelten Fehlergruppen beschrieben werden. Das Meßverfahren liefert somit automatisch eine Angabe über den Einfluß von Nichtlinearitäten. Im Fall des MIR - Magnetometers liegt die Nichtlinearität in einer Größenordnung von 10^{-4} . Beim Polarstern - Magnetometer liegt die Nichtlinearität unterhalb der Auflösungsgrenze. Der Betrag der Magnetfeldmessung mit dem MIR-Magnetometer vor und nach der Fehlerkorrektur ist in Abbildung 5-3 geplottet.

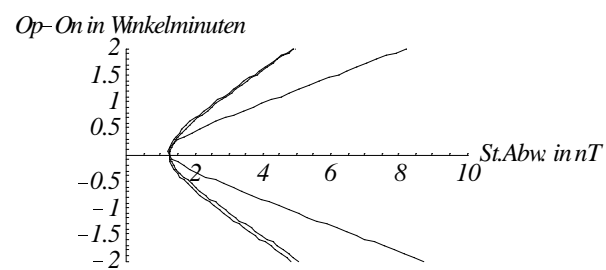
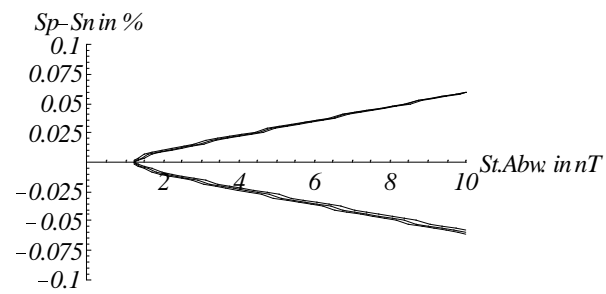
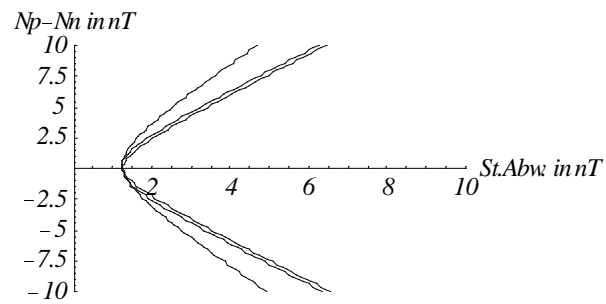
Abbildung 5-3:

*Magnetfeldbetrag vor (Einzelpunkte)
und nach (verbundene Punkte) der
Kalibrierung des MIR - Magnetometers.*



Die Grafiken in Abbildung 5-4 geben Aufschluß über die mit diesem Verfahren erreichbare Genauigkeit. Aufgetragen ist die Standardabweichung (X-Achse) als Funktion der Differenz von physikalischen Fehlern und kompensierenden numerischen Größen (Y-Achse). Ist die Standardabweichung im Konvergenzfall klein, wird der von der Kurve eingeschlossene Winkel spitz und die Meßgenauigkeit nimmt zu. Bei der Bewegung des Sensors im Erdfeld liegt die Genauigkeit der Nullpunktsbestimmung bei 2nT. Die Skalenwerte können mit einer Genauigkeit von 0,005% und die Orthogonalitätsabweichung mit einer Genauigkeit von $0,005^\circ$ bestimmt werden.

Polarstern (freie Bewegung)



MIR (freie Bewegung)

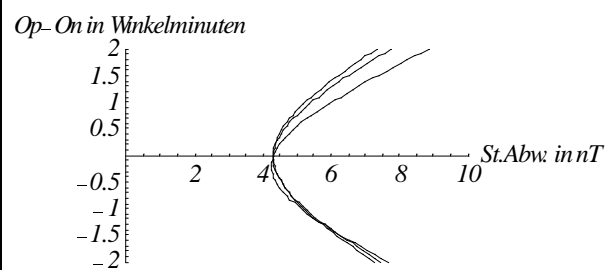
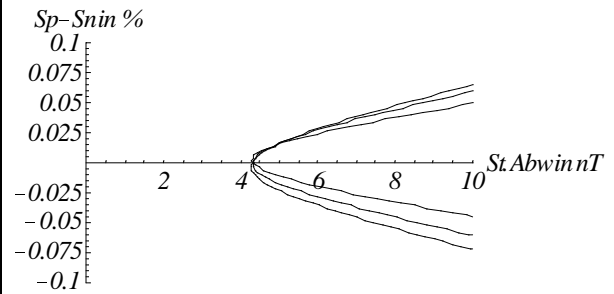
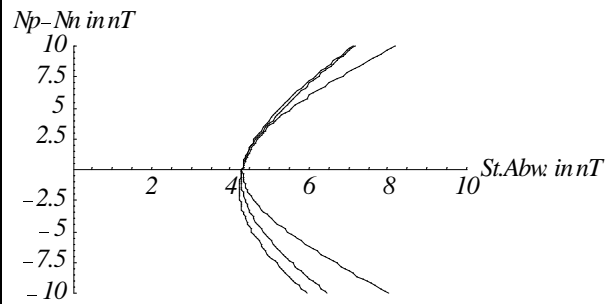


Abbildung 5-4: Standardabweichung des Betrages bei Variation der Einzelfehler (jeweils drei Komponenten der Fehlergruppen)

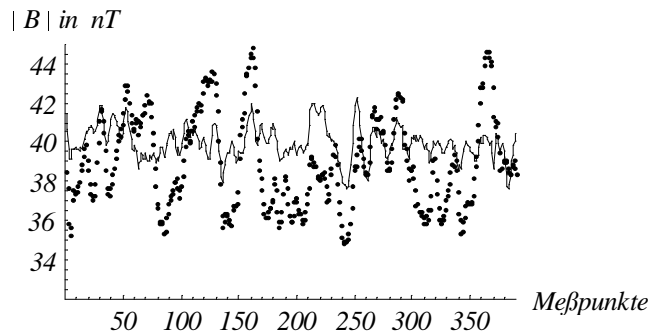
5.2 Kalibrierung mit eingeschränkten Randbedingungen

Einschränkung des Feldbereiches

Ein Magnetometer für die Cluster - Mission wurde in einem für den Cluster - Orbit typischen Meßbereich ($\pm 64\text{nT}$) getestet. Hierzu wurde im Magnetsroder Spulensystem das Erdfeld fest und die Variation des Erdfeldes dynamisch kompensiert. In einem verbleibenden Restfeld von 40nT wurde der Sensor gedreht. Man sieht an der Restwelligkeit des Magnetfeldbetrages nach der Kalibrierung (Abb. 5-5), daß die Inhomogenität in dem zur Drehung benötigten Volumen (20^3cm^3) im Bereich von $\pm 2\text{nT}$ lag. Dieser Wert korrespondiert mit den Angaben des Spulensystems. Trotz der nicht optimalen Homogenitätsverhältnisse konvergieren die Nullpunkte.

Abbildung 5-5:

Magnetfeldbetrag vor (Einzelpunkte) und nach (verbundene Punkte) der Kalibrierung des Cluster - Magnetometers.



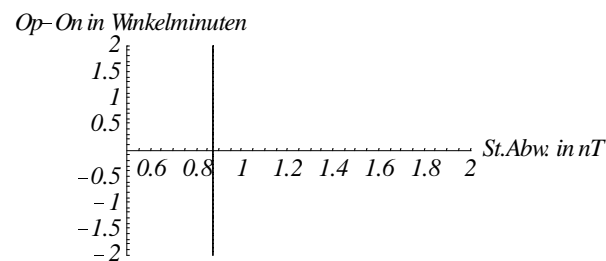
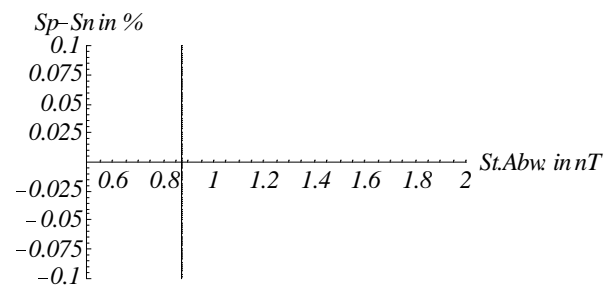
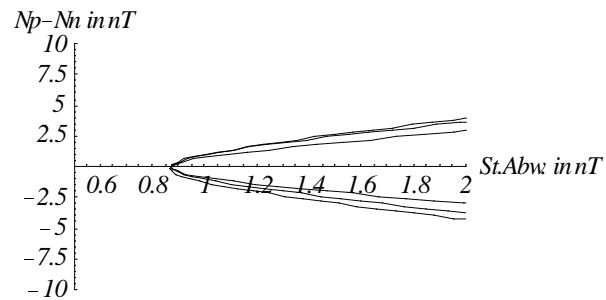
Die Ergebnisse stimmen mit denen der Standardkalibrierung überein. Skalenwerte und Orthogonalität wurden auf den Nominalwerten festgehalten, da das Verhältnis von äußerem Feld (40nT) zu Inhomogenitätsfehler zu klein für eine Bestimmung war. Die Standardabweichung der einzelnen Fehler ist in Abbildung 5-6 geplottet. Die Nullpunkte aller drei Komponenten lassen sich mit einer Genauigkeit von 0.5nT bestimmen.

Einschränkung der Bewegungsfreiheit

Wird die Bewegung von drei auf zwei Freiheitsgrade eingeschränkt (Drehung um die Winkel φ und ψ bei konstantem ϑ), stehen 8 Gleichungen zur Bestimmung von 8 Variablen zur Verfügung. Da die Gleichungen unabhängig voneinander sind, muß das Gleichungssystem nach wie vor eindeutig lösbar sein. Kommen jedoch weitere Meß- oder Instrumentenfehler hinzu, sind dem Verfahren Grenzen gesetzt. Typische Bewegungen mit eingeschränkter Bewegungsfreiheit sind die Nutation eines Satelliten oder der Seegang eines Schiffes. In beiden Fällen sind die Auslenkungen klein. Die Nutation ist bei Satelliten meist ein ungewollter Fehlerzustand und der Nutationswinkel ϑ beträgt meist nur wenige Grad (Interball Aurora 3.7°). Auch der Neigungswinkel von Schiffen wird zum Beispiel bei der Polarstern mit kleiner 10° angegeben. Somit sind die Fehler der Komponenten in ihrer Bestimmbarkeit nicht mehr gleichberechtigt. Werden Meß- oder nicht berücksichtigte Instrumentenfehler im Betrag größer als der Einfluß der Variation einer der 9 Kompensationswerte auf den Betrag, konvergiert das Gesamtsystem nicht mehr. In diesem Fall muß der sich auf den Betrag unempfindlich auswirkende Kompensationswert auf einen wahrscheinlichen Wert festgehalten werden, um die anderen Kompensationswerte zu

ermitteln. Diese Einschränkung beeinflusst nur minimal die Bestimmung der restlichen Kompensationswerte, da der Grund für die schlechte Konvergenz in dem geringen Einfluß des festzuhaltenden Kompensationswertes liegt.

Magnetometer für Cluster (FM 7)
freie Bewegung im reduzierten Feld



Magnetometer für die Polarstern
mit eingeschränkter Bewegung (Seegang)

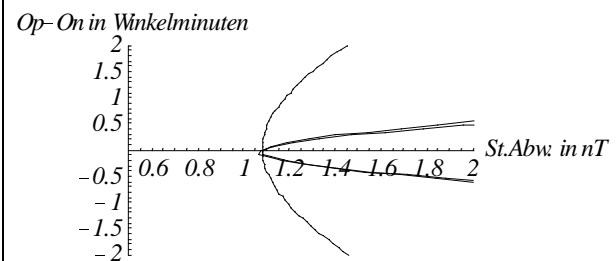
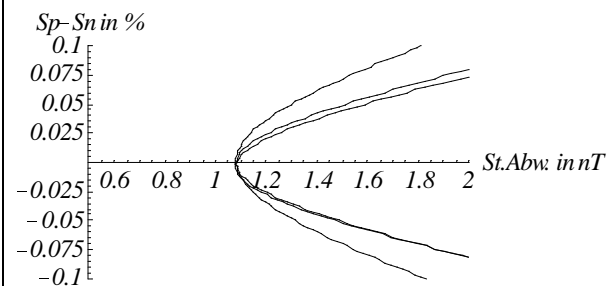
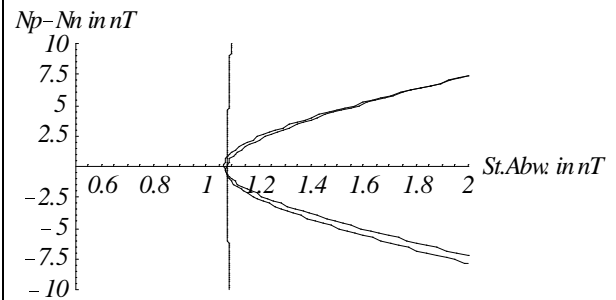


Abbildung 5-6:

Standardabweichung des Betrages bei Variation der Einzelfehler
(jeweils drei Komponenten der Fehlergruppen)

In der zweiten Spalte der Abbildung 5-6 sind Meßergebnisse für einen Sensor mit eingeschränkter Bewegung geplottet. Das Polarstern - Magnetometer wurde um eine Achse gedreht und die Rotationsachse wurde in zwei Grad Schritten um insgesamt 10° gekippt. Man sieht, daß die Komponente des Nullpunktes in Rotationsachsenrichtung schlecht konvergiert. Hält man den Kompensationswert für diese Nullpunktskomponente fest, können die anderen Kompensationswerte über die Minimum - Varianz - Analyse bestimmt werden.

5.3 Sonderfälle der Rotation

Für die Betrachtung der Drehung um einen Freiheitsgrad soll die in Abschnitt 4 analysierte Rotation um den Winkel ψ genutzt werden. Bei der Rotation um ψ ist die Rotationsachse identisch mit der Z-Achse des Magnetfeldkoordinatensystems $\{B_x, B_y, B_z\}$.

Koordinatensysteme, bei denen eine Achse durch die Rotationsachse definiert wird (Spin Referenz Systeme), sind als Übergangskoordinatensysteme bei rotierenden Satelliten üblich, da die Daten über die Orientierung des Satelliten ebenfalls auf dieses System bezogen werden (siehe Equator-S und Cluster).

Der allgemeine Fall wurde bereits in Abschnitt 4 diskutiert. Im Folgenden sollen zwei Sonderfälle für die Lage des Magnetometersystems $\{B_{Rx}, B_{Ry}, B_{Rz}\}$ betrachtet werden. Im ersten Schritt soll eine Achse des Magnetometersystems in die Rotationsebene gelegt werden. Im zweiten Schritt soll auch die zweite Achse in die Rotationsebene gelegt werden. Somit ist die dritte Achse zwangsläufig parallel zur Rotationsachse.

B_{Rx} in der Rotationsebene

Die Magnetometerkomponente B_{Rx} liegt in der Rotationsebene, wenn der Winkel φ gleich Null ist. Setzt man in den allgemein für die Rotation um ψ berechneten Gleichungen den Winkel φ gleich Null, erhält man für die Fehlergruppen die folgenden Lösungsmengen:

- Nullpunkte

Die Koeffizienten der Gleichung $a_1 N_x + a_2 N_y + a_3 N_z = 0$ vereinfachen sich wie folgt:

<p>Sinus-Anteile einfache Rotationsfrequenz</p> $\begin{aligned} a_1^S &= -B_x \\ a_2^S &= -B_y \cos \vartheta \\ a_3^S &= B_y \sin \vartheta \end{aligned}$	<p>Kosinus-Anteile einfache Rotationsfrequenz</p> $\begin{aligned} a_1^C &= B_y \\ a_2^C &= -B_x \cos \vartheta \\ a_3^C &= B_x \sin \vartheta \end{aligned}$
--	---

Separiert man Feld- und Nullpunktvariablen, erhält man das folgende explizit lösbare Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} -N_x & -N_y \cos \vartheta + N_z \sin \vartheta \\ -N_y \cos \vartheta + N_z \sin \vartheta & N_x \end{bmatrix} \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix} = 0$$

Das Gleichungssystem ist gelöst, wenn der Vektor (auszuschließende Lösung) oder die Determinante der Matrix gleich Null sind. Da es sich bei der Determinante um die Summe zweier Quadrate handelt, gilt: $N_x = 0$ und $\frac{N_y}{N_z} = \tan \vartheta$

Der Nullpunkt der in der Rotationsebene liegenden Komponente sowie die Projektion der Nullpunkte der anderen beiden Komponenten auf die Rotationsebene müssen gleich Null sein, um die Gleichung zu erfüllen. N_x läßt sich absolut, N_y und N_z nur relativ bestimmen. Hieraus ergibt sich die Möglichkeit der Bestimmung des Winkels ϑ durch eine bewußte Variation des Nullpunktes einer nicht in der Rotationsebene liegenden Komponente und der Ermittlung des Nullpunktes der anderen außerhalb der Ebene liegenden Komponente mittels Minimum - Varianz - Analyse des Betrages.

- Skalenwerte

Die Koeffizienten der Gleichung $a_{11} Sk_x^2 + a_{22} Sk_y^2 + a_{33} Sk_z^2 = 0$ vereinfachen sich wie folgt:

Sinus-Anteile einfache Rotationsfrequenz

$$a_{11}^S = 0$$

$$a_{22}^S = -2 B_y B_z \sin 2\vartheta$$

$$a_{33}^S = 2 B_y B_z \sin 2\vartheta$$

Sinus-Anteile doppelte Rotationsfrequenz

$$a_{11}^{2S} = -4(B_x^2 - B_y^2)$$

$$a_{22}^{2S} = 2(B_x^2 - B_y^2)(1 + \cos 2\vartheta)$$

$$a_{33}^{2S} = 2(B_x^2 - B_y^2)(1 - \cos 2\vartheta)$$

Kosinus-Anteile einfache Rotationsfrequenz

$$a_{11}^C = 0$$

$$a_{22}^C = -2 B_x B_z \sin 2\vartheta$$

$$a_{33}^C = 2 B_x B_z \sin 2\vartheta$$

Kosinus-Anteile doppelte Rotationsfrequenz

$$a_{11}^{2C} = 8 B_x B_y$$

$$a_{22}^{2C} = -4 B_x B_y (1 + \cos 2\vartheta)$$

$$a_{33}^{2C} = -4 B_x B_y (1 - \cos 2\vartheta)$$

Die Koeffizienten der Sinus- und Kosinuskösungen unterscheiden sich lediglich durch einen konstanten Faktor. Somit sind die Lösungsmengen identisch. Das äußere Feld hat keinen Einfluß auf die Lösungsmenge, da die Feldkomponenten B_x und B_y jeweils in den gemeinsamen Faktoren der Koeffizienten enthalten sind. Somit stehen nur zwei Gleichungen für die Bestimmung der drei Unbekannten zur Verfügung. Die Lösung der ersten Gleichung ist ein Paar sich in der Sk_x Achse schneidender Flächen, deren Schnittgeraden mit der $Sk_y Sk_z$ -Ebene die Diagonalen dieser Ebene sind. Die Lösung der zweiten Gleichung ist ein Kegel mit der Sk_x Achse als Symmetrieachse. Kegel und Flächenpaar schneiden sich in den Raumdiagonalen des $\{Sk_x, Sk_y, Sk_z\}$ Raumes. Somit können drei Skalenwerte mittels zweier Gleichungen nur relativ bestimmt werden.

- Orthogonalitätsabweichung

Die Lösungsmengen bleiben unverändert Flächen zweiter Ordnung. Die Koeffizienten der Gleichung $a_{11} O_{xy}^2 + a_{22} O_{xz}^2 + a_{33} O_{yz}^2 + 2a_1(O_{xz} O_{yz} + O_{xy}) + 2a_2 O_{xz} + 2a_3 O_{yz} = 0$ vereinfachen sich wie folgt:

Sinus-Anteile einfache Rotationsfrequenz

$$\begin{aligned} a_{11}^S &= a_{22}^S = 0 \\ a_{33}^S &= -4B_y \sin 2\vartheta \\ a_1^S &= -4B_x \sin \vartheta \\ a_2^S &= -4B_x \cos \vartheta \\ a_3^S &= -4B_y \cos 2\vartheta \end{aligned}$$

Sinus-Anteile doppelte Rotationsfrequenz

$$\begin{aligned} a_{11}^{2S} &= a_{22}^{2S} = -8(B_x^2 - B_y^2) \\ a_{33}^{2S} &= 8(B_x^2 - B_y^2) \cos^2 \vartheta \\ a_1^{2S} &= -16B_x B_y \cos \vartheta \\ a_2^{2S} &= 16B_x B_y \sin \vartheta \\ a_3^{2S} &= -4(B_x^2 - B_y^2) \sin 2\vartheta \end{aligned}$$

Kosinus-Anteile einfache Rotationsfrequenz

$$\begin{aligned} a_{11}^C &= a_{22}^C = 0 \\ a_{33}^C &= 4B_x \sin 2\vartheta \\ a_1^C &= -4B_y \sin \vartheta \\ a_2^C &= -4B_y \cos \vartheta \\ a_3^C &= 4B_x \cos 2\vartheta \end{aligned}$$

Kosinus-Anteile doppelte Rotationsfrequenz

$$\begin{aligned} a_{11}^{2C} &= a_{22}^{2C} = 8B_x B_y \\ a_{33}^{2C} &= -8B_x B_y \cos^2 \vartheta \\ a_1^{2C} &= -4(B_x^2 - B_y^2) \cos \vartheta \\ a_2^{2C} &= 4(B_x^2 - B_y^2) \sin \vartheta \\ a_3^{2C} &= 4B_x B_y \sin 2\vartheta \end{aligned}$$

Nach der Hauptachsentransformation ergeben sich für die Lösungsmengen die folgenden charakteristischen Parameter:

Sinus-Anteile einfache Rotationsfrequenz

$$\begin{aligned} d_{11}^S &= 1 \\ d_{22}^S &= -2B_y \sin 2\vartheta - 2\sqrt{4B_x^2 \sin^2 \vartheta + B_y^2 \sin^2 2\vartheta} \\ d_{33}^S &= -2B_y \sin 2\vartheta + 2\sqrt{4B_x^2 \sin^2 \vartheta + B_y^2 \sin^2 2\vartheta} \\ b_0^S &= -8 \sin \vartheta (B_y \cos \vartheta + 2B_x^2 \sin \vartheta) \end{aligned}$$

Sinus-Anteile doppelte Rotationsfrequenz

$$\begin{aligned} d_{11}^{2S} &= -8(B_x^2 - B_y^2) \\ d_{22}^{2S} &= -4(B_x^2 - B_y^2) \sin^2 \vartheta \\ &\quad - 4\sqrt{4(B_x^2 + B_y^2)^2 \cos^2 \vartheta + (B_x^2 - B_y^2)^2 \sin^4 \vartheta} \\ d_{33}^{2S} &= -4(B_x^2 - B_y^2) \sin^2 \vartheta \\ &\quad + 4\sqrt{4(B_x^2 + B_y^2)^2 \cos^2 \vartheta + (B_x^2 - B_y^2)^2 \sin^4 \vartheta} \\ b_0 &= -8 \frac{4B_x^2 B_y^2 + (B_x^2 + B_y^2)^2 \sin^2 \vartheta}{B_x^2 - B_y^2} \end{aligned}$$

Kosinus-Anteile einfache Rotationsfrequenz

$$\begin{aligned} d_{11}^C &= 1 \\ d_{22}^C &= 2B_x \sin 2\vartheta - 2\sqrt{4B_y^2 \sin^2 \vartheta + B_x^2 \sin^2 2\vartheta} \\ d_{33}^C &= 2B_x \sin 2\vartheta + 2\sqrt{4B_y^2 \sin^2 \vartheta + B_x^2 \sin^2 2\vartheta} \\ b_0^C &= 8 \sin \vartheta (B_x \cos \vartheta - 2B_y^2 \sin \vartheta) \end{aligned}$$

Kosinus-Anteile doppelte Rotationsfrequenz

$$\begin{aligned} d_{11}^{2C} &= 8B_x B_y \\ d_{22}^{2C} &= 4B_x B_y \sin^2 \vartheta \\ &\quad - 4\sqrt{(B_x^2 + B_y^2)^2 \cos^2 \vartheta + (B_x B_y)^2 \sin^4 \vartheta} \\ d_{33}^{2C} &= 4B_x B_y \sin^2 \vartheta \\ &\quad + 4\sqrt{(B_x^2 + B_y^2)^2 \cos^2 \vartheta + (B_x B_y)^2 \sin^4 \vartheta} \\ b_0 &= 2 \frac{2B_x^2 B_y^2 - (B_x^2 + B_y^2)^2 \cos^2 \vartheta}{B_x B_y} \end{aligned}$$

Mit der gleichen Argumentation wie bei der allgemeinen Lösung kann man die mit den charakteristischen Parametern beschriebenen Flächen in die Gruppe der ein- oder zweischaligen Hyperboloide einordnen. Der Schnittpunkt aller vier Hyperboloide liegt im Koordinatenursprung des $\{O_{xy}, O_{xz}, O_{yz}\}$ -Raumes.

In der folgenden Tabelle sind die aus der Rotation um ψ gewonnenen Gleichungen und die darin enthaltenen Variablen zusammengefaßt.

spektraler Bestandteil (Gleichungen)	Abhängigkeit der Fehler (Variablen)
$\sin(\psi)$	$N_x, N_y/N_z, Sk_y/Sk_z, O_{xy}, O_{xz}, O_{yz}$
$\cos(\psi)$	$N_x, N_y/N_z, Sk_y/Sk_z, O_{xy}, O_{xz}, O_{yz}$
$\sin(2\psi)$	$Sk_x/Sk_y, Sk_y/Sk_z, O_{xy}, O_{xz}, O_{yz}$
$\cos(2\psi)$	$Sk_x/Sk_y, Sk_y/Sk_z, O_{xy}, O_{xz}, O_{yz}$

Für die Bestimmung der sieben Unbekannten $N_x, N_y/N_z, Sk_x/Sk_y, Sk_y/Sk_z, O_{xy}, O_{xz}, O_{yz}$ stehen lediglich vier Gleichungen zur Verfügung. Auf Grund der feldabhängigen Lösungsmengen der Orthogonalitätsabweichung können aber mit einer zweiten Messung bei veränderten Feldverhältnissen weitere Gleichungen für die Orthogonalitätsabweichung gewonnen werden. Somit wären alle 7 Variablen bestimmbar. Die Winkel der Orthogonalitätsabweichung sowie der Nullpunkt der N_x Komponente können absolut ermittelt werden. Die Skalenwerte sowie die Nullpunkte der Y- und Z-Komponente sind nur relativ bestimmbar.

B_{Rx} und B_{Ry} in der Rotationsebene

Die Rotation um eine Sensorachse wird erreicht, wenn bei einer Rotation um ψ die Winkel ϑ und φ gleich Null sind. In diesem Fall liegt die Magnetometerkomponente B_{Rz} in der Richtung der Rotationsachse und die Komponenten B_{Rx} und B_{Ry} in der Rotationsebene. Für die Lösungsmengen der Fehlergruppen hat das folgende Konsequenz:

- Nullpunkte

Die Koeffizienten der Gleichung $a_1 N_x + a_2 N_y + a_3 N_z = 0$ vereinfachen sich wie folgt:

Sinus-Anteile einfache Rotationsfrequenz	Kosinus-Anteile einfache Rotationsfrequenz
$a_1^S = -B_x$	$a_1^C = B_y$
$a_2^S = -B_y$	$a_2^C = -B_x$
$a_3^S = 0$	$a_3^C = 0$

Separiert man Feld- und Nullpunktvariablen, erhält man folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} -N_x & -N_y \\ -N_y & N_x \end{bmatrix} \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix} = 0$$

Da N_x und N_y Null sein müssen sind die physikalischen Nullpunkte der Komponenten senkrecht zur Rotationsachse bestimmt. Über N_z und somit über den Nullpunkt in Spinnachsenrichtung läßt sich keine Aussage machen.

- Skalenwerte

Die Koeffizienten der Gleichung $a_{11} Sk_x^2 + a_{22} Sk_y^2 + a_{33} Sk_z^2 = 0$ vereinfachen sich wie folgt:

<p>Sinus-Anteile doppelte Rotationsfrequenz</p> $\begin{aligned} a_{11}^{2S} &= -4(B_x^2 - B_y^2) \\ a_{22}^{2S} &= +4(B_x^2 - B_y^2) \\ a_{33}^{2S} &= 0 \end{aligned}$	<p>Kosinus-Anteile doppelte Rotationsfrequenz</p> $\begin{aligned} a_{11}^{2C} &= +8 B_x B_y \\ a_{22}^{2C} &= -8 B_x B_y \\ a_{33}^{2C} &= 0 \end{aligned}$
--	--

Über den Skalenwert Sk_z in Rotationsachsenrichtung kann keine Aussage gemacht werden, da die Koeffizienten a_{33} gleich Null sind. Die Koeffizienten a_{11} und a_{22} der Skalenwerte Sk_x und Sk_y haben den gleichen Betrag und unterscheiden sich im Vorzeichen. Sinus- und Kosinusanteile liefern die identische, vom Feld unabhängige Lösung $Sk_x^2 = Sk_y^2$. Somit kann man Sk_x und Sk_y nur relativ bestimmen.

- Orthogonalitätsabweichung

Die in der Gleichung $a_{11} O_{xy}^2 + a_{22} O_{xz}^2 + a_{33} O_{yz}^2 + 2a_1(O_{xz} O_{yz} + O_{xy}) + 2a_2 O_{xz} + 2a_3 O_{yz} = 0$ enthaltenen Koeffizienten lassen sich wie folgt vereinfachen:

<p>Sinus-Anteile einfache Rotationsfrequenz</p> $\begin{aligned} a_{11}^S &= a_{22}^S = a_{33}^S = a_1^S = 0 \\ a_2^S &= -4B_x \\ a_3^S &= -4B_y \end{aligned}$	<p>Kosinus-Anteile einfache Rotationsfrequenz</p> $\begin{aligned} a_{11}^C &= a_{22}^C = a_{33}^C = a_1^C = 0 \\ a_2^C &= -4B_y \\ a_3^C &= 4B_x \end{aligned}$
<p>Sinus-Anteile doppelte Rotationsfrequenz</p> $\begin{aligned} a_{11}^{2S} &= a_{22}^{2S} = -8(B_x^2 - B_y^2) \\ a_{33}^{2S} &= 8(B_x^2 - B_y^2) \\ a_1^{2S} &= -16B_x B_y \\ a_2^{2S} &= a_3^{2S} = 0 \end{aligned}$	<p>Kosinus-Anteile doppelte Rotationsfrequenz</p> $\begin{aligned} a_{11}^{2C} &= a_{22}^{2C} = 8 B_x B_y \\ a_{33}^{2C} &= -8 B_x B_y \\ a_1^{2C} &= -4(B_x^2 - B_y^2) \\ a_2^{2C} &= a_3^{2C} = 0 \end{aligned}$

Die spektralen Anteile der einfachen Rotationsfrequenz ergeben Flächen, die jeweils durch Geraden in der $O_{xz} O_{yz}$ -Ebene und einen beliebigen O_{xy} -Wert beschrieben werden. Die Schnittgerade beider Flächen ist die O_{xy} -Achse. Zur Interpretation der Anteile der doppelten Rotationsfrequenz wird eine Hauptachsentransformation durchgeführt. Daraus ergeben sich die charakteristischen Parameter für die Flächen zweiter Ordnung wie folgt:

<p>Sinus-Anteile doppelte Rotationsfrequenz</p> $\begin{aligned} d_{11}^{2S} &= -8(B_x^2 - B_y^2) \\ d_{22}^{2S} &= -8(B_x^2 + B_y^2) \\ d_{33}^{2S} &= +8(B_x^2 + B_y^2) \\ b_0 &= -32 \frac{B_x^2 B_y^2}{B_x^2 - B_y^2} \end{aligned}$	<p>Kosinus-Anteile doppelte Rotationsfrequenz</p> $\begin{aligned} d_{11}^{2C} &= +8 B_x B_y \\ d_{22}^{2C} &= -4(B_x^2 + B_y^2) \\ d_{33}^{2C} &= +4(B_x^2 + B_y^2) \\ b_0 &= -2 \frac{B_x^2 + B_y^2}{B_x B_y} \end{aligned}$
--	--

Beide Lösungen beschreiben auf Grund der Vorzeichen der charakteristischen Parameter einschalige Hyperboloiden. Die Schnittkurve geht durch den Koordinatenursprung des $\{O_{xy}, O_{xz}, O_{yz}\}$ -Raumes.

In der folgenden Tabelle sind die aus der Rotation um ψ gewonnenen Gleichungen und die darin enthaltenen Variablen zusammengefaßt.

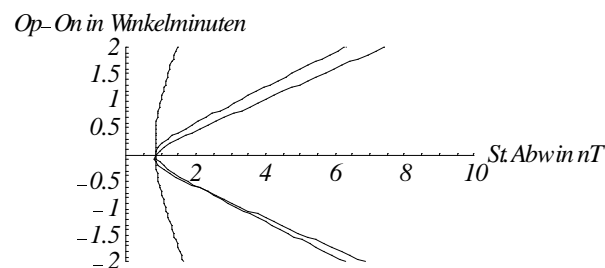
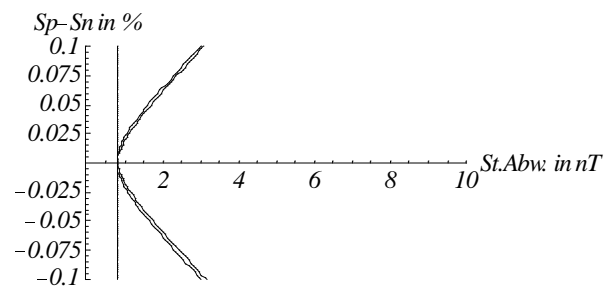
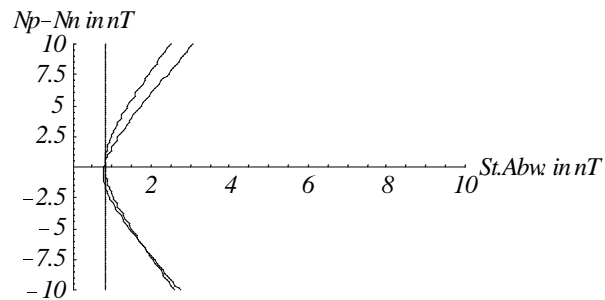
spektraler Bestandteil (Gleichungen)	Abhängigkeit der Fehler (Variablen)
$\sin(\psi)$	N_x, N_y, O_{xz}, O_{yz}
$\cos(\psi)$	N_x, N_y, O_{xz}, O_{yz}
$\sin(2\psi)$	$Sk_x / Sk_y, O_{xy}, O_{xz}, O_{yz}$
$\cos(2\psi)$	$Sk_x / Sk_y, O_{xy}, O_{xz}, O_{yz}$

Für die Bestimmung der 6 Unbekannten $N_x, N_y, Sk_x / Sk_y, O_{xy}, O_{xz}, O_{yz}$ stehen 4 Gleichungen zur Verfügung. Nutzt man die Feldabhängigkeit der Lösungsmengen der Orthogonalitätsabweichung aus, können mit Hilfe einer zweiten Messung bei veränderten Feldverhältnissen weitere Gleichungen für die Bestimmung der Orthogonalitätsabweichung gewonnen werden. Somit wären alle 6 Variablen bestimmbar. Die Winkel der Orthogonalitätsabweichung sowie die Nullpunkte der X- und Y Komponente können absolut ermittelt werden. Die Skalenwerte der X- und Y-Komponente sind nur relativ bestimmbar. Über den Nullpunkt und den Skalenwert der Z-Komponente kann keine Aussage gemacht werden. Alternativ zu einer zweiten Messung kann mit der Wahl spezieller Feldverhältnisse der Beitrag einzelner Fehlergruppen zur Betragsberechnung vernachlässigt und somit die Anzahl der Unbekannten reduziert werden. Im Erdfeld ist der Einfluß des Nullpunktes auf den Betrag geringer als der Einfluß von Skalenwerten und Orthogonalität. Vernachlässigt man die Nullpunkte, so können aus der Analyse der einfachen Rotationsfrequenz die Winkelfehler zur Rotationsachse und aus der Analyse der doppelten Rotationsfrequenz das Verhältnis der Skalenwerte und die Orthogonalitätsabweichung in der Rotationsebene bestimmt werden. In kleinen Feldern sind die Anteile der einfachen Rotationsfrequenz den Nullpunkten in der Rotationsebene zuzuordnen. Eine dritte Möglichkeit der Reduzierung der Variablen ist gegeben, wenn der Feldbetrag in Rotationsachsenrichtung klein ist. In diesem Fall ist die Orthogonalitätsabweichung zur Rotationsachse vernachlässigbar. Mit Hilfe der vier Gleichungen können zwei Nullpunkte und die Orthogonalitätsabweichung zwischen den Komponenten der Rotationsebene absolut sowie die Skalenwerte der Komponenten in der Rotationsebene relativ bestimmt werden.

Als Beispiel für eine Rotation im Erdfeld wird wiederum das Polarstern - Magnetometer herangezogen. Alternativ dazu werden die Fehler des Magnetometers auf dem schnell rotierenden Satelliten Equator-S bei einer Entfernung von 10 Erdradien (Feld $< 50\text{nT}$) analysiert. In Abbildung 5-7 ist die Standardabweichung in Abhängigkeit der Einzelfehler für die Rotation der Sensoren beider Magnetometer dargestellt. Sowohl der Nullpunkt als auch der Skalenwert in Rotationsachsenrichtung liefern keinen Beitrag für den Oberwellengehalt im Betrag. Die drei Komponenten der Orthogonalitätsabweichung lassen sich hingegen durch eine Minimum - Varianz - Analyse des Betrages berechnen. Die Genauigkeit für die Fehlerbestimmung liegt bei 2nT (Nullpunkte) bzw. 10^{-4} (Skalenwerte und Orthogonalitätsabweichung). Anders stellen sich die Verhältnisse für das Equator-S Magnetometer dar. Auf Grund der homogenen Feldverhältnisse im Weltraum wird die Gesamtgenauigkeit ausschließlich vom Rauschpegel des Magnetometers bestimmt. Im Konvergenzfall liegt die Standardabweichung bei 60pT (im Vergleich: Magnetometer für Polarstern 1nT , MIR 4nT).

Die Nullpunkte sind mit einer Genauigkeit von 0.02nT bestimmbar. Hingegen sind Skalenwert und Orthogonalitätsabweichung maximal mit dem Verhältnis von äußerem Feld zu Rauschpegel bestimmbar. Das entspricht in diesem Fall einer Genauigkeit von 10^{-3} .

Polarstern (Rotation)



EQS (Rotation)

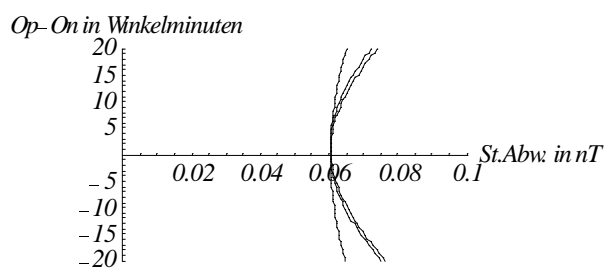
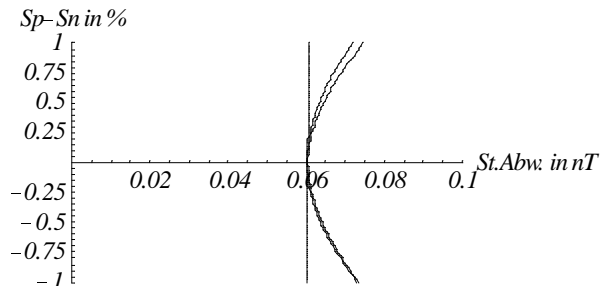
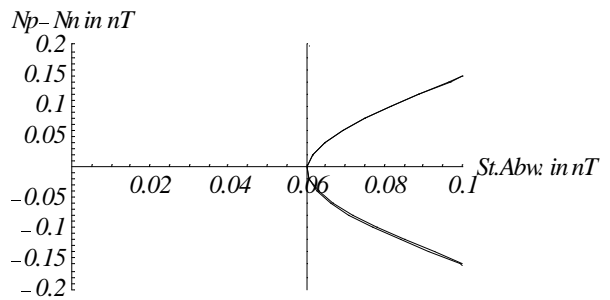
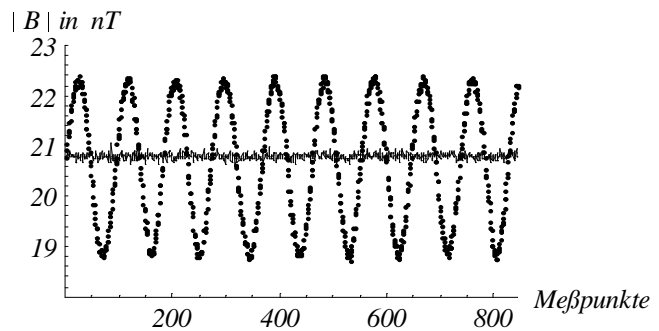


Abbildung 5-7: Standardabweichung des Betrages bei Variation der Einzelfehler (jeweils drei Komponenten der Fehlergruppen)

Abbildung 5-8 zeigt den aus den Komponenten berechneten Magnetfeldbetrag. Die aus Einzelpunkten bestehende Kurve zeigt der Plot der unkalibrierten Daten. Die Rotationsfrequenz im Betrag des unkalibrierten Magnetometers wird durch die nicht kompensierten Nullpunkte erzeugt. Nach der Korrektur der Fehler ergibt sich der mit durchgezogenen Linien geplottete Betrag. Es verbleibt das Rauschspektrum des Sensors als die die Genauigkeit begrenzende Größe.

Abbildung 5-8:

Magnetfeldbetrag vor (Einzelpunkte) und nach (verbundene Punkte) der Kalibrierung des EQS Magnetometers.



Da Equator-S den Feldbereich von 30nT bis 30.000nT durchflog, konnten die Nullpunkte in der Rotationsebene und die Orthogonalitätsabweichung absolut bestimmt werden. Die Skalenwerte in der Rotationsebene wurden relativ kalibriert. Für die Bestimmung des Nullpunktes und des Skalenwertes in Rotationsachsenrichtung reicht die Bewegung um einen Freiheitsgrad nicht aus.

In der folgenden Tabelle sind die Bestimmungsmöglichkeiten der Fehlergruppen für die Rotation um eine Achse im Vergleich zur Bewegung um mehrere Freiheitsgrade dargestellt.

Bewegung	B^2 bekannt (+1 Gleichung.)	B^2 unbekannt aber konstant
Rotation um drei Achsen	12 + 1 Gleichungen	12 Gleichungen
Rotation um zwei Achsen	8 + 1 Gleichungen	8 Gleichungen
	absolut bestimmbar: N_x, N_y, N_z S_x, S_y, S_z O_{xy}, O_{xz}, O_{yz}	absolut bestimmbar: N_x, N_y, N_z O_{xy}, O_{xz}, O_{yz} relative bestimmbar: S_x, S_y, S_z
Rotation um eine Achse	n (4 + 1) Gleichungen	n 4 Gleichungen
<ul style="list-style-type: none"> • Rotationsachse nicht identisch einer Sensorachse • Messungen bei n sich voneinander unterscheidenden äußeren Feldern 	absolut bestimmbar: N_x, N_y, N_z S_x, S_y, S_z O_{xy}, O_{xz}, O_{yz}	absolut bestimmbar: O_{xy}, O_{xz}, O_{yz} relative bestimmbar: $N_x / N_y / N_z$ $S_x / S_y / S_z$
Rotation um eine Achse	n (4 + 1) Gleichungen	n 4 Gleichungen
<ul style="list-style-type: none"> • Rotationsachse identisch mit der Z-Achse des Sensors • Messungen bei n sich voneinander unterscheidenden äußeren Feldern 	absolut bestimmbar: N_x, N_y, N_z S_x, S_y, S_z O_{xy}, O_{xz}, O_{yz}	absolut bestimmbar: N_x, N_y O_{xy}, O_{xz}, O_{yz} relative bestimmbar: S_x, S_y

6 Zusammenfassung der Ergebnisse

In der Arbeit wurde untersucht, wie die Signaturen einer Sensorbewegung im aus fehlerbehafteten Komponenten berechneten Magnetfeldbetrag auf die Fehler der Messung schließen lassen. Hierzu wurde ein konstantes homogenes äußeres Feld angenommen. Die Relativbewegung wurde durch eine Koordinatentransformation des Feldvektors in das Sensorsystem (Drehung um die Eulerschen Winkel) realisiert. Um zum realen Meßwert zu gelangen, wurden die Fehlergruppen Nullpunktverschiebung, Skalenwertabweichung und Orthogonalitätsabweichung eingeführt. Anschließend wurde der Betrag berechnet, die Ableitung des Betrages nach den Freiheitsgraden der Bewegung gleich Null gesetzt und das entstandene Gleichungssystem ausgewertet.

Zwei grundsätzliche Fragen wurden beantwortet.

Im ersten Teil der Arbeit wurde der Frage nach der Parametrisierung der Fehler nachgegangen. Es wurde nachgewiesen, daß Anregungs- oder Sensorfehler zu Skalenwert- oder Nullpunktabweichungen führen und daß man Skalenwerte und Orthogonalitätsabweichung als linear annehmen kann.

Der zweite Teil der Arbeit befaßt sich mit der Frage der Korrigierbarkeit der Fehler. Dazu war insbesondere zu klären, ob sich verschiedene Fehlergruppen eindeutig lokalisieren und den parametrisierten Fehlergrößen zuordnen lassen. Die sich aus dem Meßverfahren ergebende Anzahl und Struktur der Gleichungen wurde analysiert. Die Lösungsmengen wurden hinsichtlich ihrer Unabhängigkeit untereinander und ihrer Abhängigkeit von Rotationsachse und Feldvektor untersucht.

Die Antworten auf diese Fragen sollen an dieser Stelle noch einmal zusammengefaßt werden.

Die mit Hilfe eines Standardmodells für den Entstehungsprozeß der feldabhängigen zweiten Harmonischen der Anregungsfrequenz berechnete Ausgangsspannung stimmt mit der realen Ausgangsspannung in vielen Punkten nicht überein. So erklärt das Modell weder die Phasenverschiebung des feldabhängigen Frequenzanteils zur Anregungsfrequenz noch den erheblichen Anteil an feldunabhängigen Frequenzanteilen. Aus diesem Grund wurde das Standardmodell durch die Modifikationen der Sensor- und Anregungseigenschaften der Praxis angepaßt. Um die Asymmetrie des Sensors zu berücksichtigen, wurde die in der Sekundärspule induzierte Spannung für jedes Ringkernsegment einzeln berechnet.

Unterschiedliche magnetische Eigenschaften von Ringkernsegmenten konnten so über eine gewichtet Addition der Teilspannungen berücksichtigt werden. Die Ausgangsspannung wurde für die Extremfälle - symmetrischer Doppelkernsensor und Einzelkernsensor - berechnet. Um die Phasenverschiebung zwischen Anregung und Ausgangssignal zu erklären, wurde die Hysterese des weichmagnetischen Materials berücksichtigt. Weiterhin wurde der dreieckförmige Anregungsstrom des Standardmodells durch Stromsegmente variabler Steigung ersetzt.

Nach der Einführung von Anregungs- und Sensorfehlern wurde mit Hilfe des modifizierten Modells die Empfindlichkeit (Skalenwert) und der Nullpunktversatz der Ausgangsspannung berechnet. Es zeigte sich, daß ein gestörtes Taktverhältnis der Anregung weder bei einem symmetrischen noch bei einem asymmetrischen Sensor Nullpunkte oder Skalenwertabweichungen produziert. Ein mit einem Offset behafteter Anregungsstrom erzeugt nur bei einem asymmetrischen Sensor einen Versatz des Nullpunktes. Die Asymmetrie der Hysterese hingegen erzeugt sowohl bei einem symmetrischen als auch bei einem asymmetrischen Sensor einen Versatz des Nullpunktes. Somit führen Anregungsoffset und Asymmetrie der Hysterese zum Versatz des Nullpunktes. In den Skalenwert gehen die Anregungs- und

Materialparameter direkt ein. Es bleibt die Frage zu beantworten, ob der Skalenwert als linear anzunehmen ist. Ein feldabhängiger und somit nichtlinearer Skalenwert ist auf Grund der Aussteuerabhängigkeit von Anregungsstrom und weichmagnetischem Material zu erwarten. Ebenso feldabhängig wirkt der Querfeldeinfluß bei Ringkernen auf die Orthogonalitätsabweichung. Die Ursache, der Einkoppelmechanismus und die Möglichkeiten, den Querfeldeinfluß auf das Ausgangssignal zu unterdrücken, wurden beschrieben. Es wurde weiterhin gezeigt, daß mit der Feldgegenkopplung sowohl der Skalenwert als auch die Orthogonalitätsabweichung linearisiert werden kann. Aus diesen Gründen wurde in der Betragsanalyse eines bewegten Sensors von feldunabhängigen Fehlergrößen ausgegangen.

Die Bestimmbarkeit der Fehler hängt von der Anzahl der bei der Betragsanalyse gewonnenen Gleichungen ab. Da das gemessene Magnetfeld eine Funktion des wahren Magnetfeldes, der Eulerschen Winkel und der Fehlergruppen (\mathbf{N} , $\mathbf{S_k}$, \mathbf{O}) ist, treten die Komponenten des wahren Magnetfeldes, die Komponenten der Fehlergruppen sowie die Eulerschen Winkel im Betrag des gemessenen Magnetfeldes in linearen und quadratischen Termen auf. Die Eichgleichungen werden gewonnen, indem die Ableitung des Betrages nach den Freiheitsgraden der Bewegung des Sensors und somit die Ableitungen nach den Eulerschen Winkeln gleich Null gesetzt wurden. Die spektrale Zerlegung liefert für die Ableitung nach jeden Winkel vier Gleichungen. Die linearen Terme finden sich in den Sinus- und Kosinusanteilen der einfachen Rotationsfrequenz wieder. Die quadratischen Terme werden durch die Sinus- und Kosinusanteile der doppelten Rotationsfrequenz repräsentiert. Somit stehen insgesamt 12 Gleichungen zur Bestimmung von 9 Unbekannten zur Verfügung. Nicht alle Fehlergruppen treten in allen 12 Gleichungen auf. Nullpunkte verursachen im Betrag ausschließlich Spektralanteile der einfachen Rotationsfrequenz. Nicht korrigierte Skalenwerte treten immer in den spektralen Anteilen der doppelten Rotationsfrequenz auf. Erfolgt die Rotation nicht um eine Magnetometerachse, treten bei Skalenwertfehlern zusätzlich spektrale Anteile der einfachen Rotationsfrequenz auf. Die Orthogonalitätsabweichung verursacht im Betrag Spektralanteile sowohl der einfachen als auch der doppelten Rotationsfrequenz. Auch die Komponenten der Fehlergruppen treten innerhalb der Eichgleichungen wiederum in quadratischen, gemischten und linearen Termen auf. Die Lösungsmengen dieser Gleichungen sind Flächen zweiter Ordnung in den Fehlerräumen $\{N_x, N_y, N_z\}$, $\{Sk_x, Sk_y, Sk_z\}$, $\{O_{xy}, O_{xz}, O_{yz}\}$. Um die Interpretation der Flächen zu erleichtern, wurden die Lösungsmengen in die Hauptachsen transformiert und konnten anschließend klassifiziert werden. Die den Fehlerursachen zugeordneten Lösungsmengen erwiesen sich als qualitativ verschieden, so daß eine Interferenz der Fehler ausgeschlossen werden kann. Die Lösungsmengen für die Nullpunkte sind senkrecht aufeinander stehende Flächen. Die gemeinsame Lösung von zwei Eichgleichungen ist eine Gerade. Die gemeinsame Lösung von drei Eichgleichungen ist der Koordinatenursprung $N_x = N_y = N_z = 0$. Die Lösungsmengen der Skalenwerte sind Flächenpaare oder Kegel. Die gemeinsame Lösungsmenge von mehreren Eichgleichungen sind die Raumdiagonalen $Sk_x^2 = Sk_y^2 = Sk_z^2$. Die Lösungsmengen für die Orthogonalitätsabweichung sind ein- oder zweischalige Hyperboloide bzw. Zylinder. Die gemeinsame Lösung von zwei Eichgleichungen ist eine Kurve durch den Koordinatenursprung. Die gemeinsame Lösung von drei Eichgleichungen ist der Koordinatenursprung $O_{xy} = O_{xz} = O_{yz} = 0$. Da es sich bei den Lösungsmengen für Nullpunkte, Skalenwerte und Orthogonalitätsabweichung jeweils um verschiedenartige Klassen der Flächen zweiter Ordnung handelt, konnte nachgewiesen werden, daß die Eichgleichungen der Fehlergruppen voneinander unabhängig sind.

Weiterhin wurde untersucht, ob die gemeinsame Lösung zweier Gleichungen (Schnittkurve der Flächen) von der Rotationsachse oder dem Feldvektor abhängig ist. Für die Fehlergruppen konnten unterschiedliche Abhängigkeiten festgestellt werden.

Die Lösungsmengen für die Skalenwerte sind weder von der Rotationsachse noch vom Feldvektor abhängig. Die Lösungsmengen für die Nullpunkte sind von der Lage der Rotationsachse abhängig, nicht aber vom Feldvektor. Die Lösungsmengen für die Orthogonalitätsabweichung sind sowohl von der Lage der Rotationsachse als auch vom Feldvektor abhängig. Daraus folgt, daß eine Veränderung der Rotationsachse keine Einengung der Lösungsmenge für die Skalenwerte bedeutet, jedoch einen neuen Satz Gleichungen für die Bestimmung von Nullpunkten und Orthogonalitätsabweichung mit sich bringt. Eine Veränderung des Feldvektors würde einen neuen Satz Gleichungen für die Bestimmung der Orthogonalitätsabweichung liefern.

An Hand der Kalibrierung von 4 Magnetometern wurden die theoretischen Ergebnisse in der Praxis überprüft. Sowohl die Genauigkeit der Fehlerbestimmung als auch die Einschränkung des Verfahrens wurde dokumentiert. Vorteile und Einschränkungen des Verfahrens sollen abschließend gegenübergestellt werden.

Der entscheidende Vorteil ist die Ortsunabhängigkeit der Kalibrierung. Da die Kalibrierung am Einsatzort des Magnetometers durchführbar ist, entfallen Transportwege und Ausfallzeiten. Es ist nur ein minimaler Aufwand an zusätzlicher Technik zur Kalibrierung notwendig. Lediglich ein Skalarmagnetometer ist für die absolute Bestimmung der Skalenwerte notwendig. Die Kalibrierung ist von kurzer Dauer und das Ergebnis der Kalibrierung steht sofort zur Verfügung, da der rechentechnische Aufwand einer Minimum - Varianz - Analyse minimal ist. Somit ergibt sich die Möglichkeit, die Kalibrierung in kürzeren Abständen zu wiederholen und damit die Gesamtgenauigkeit zu erhöhen. Das Verfahren kann auf bewegte Systeme wie Satelliten, Schiffe oder sonstige Fahrzeuge übertragen werden. Hart- und weichmagnetische Störquellen, die fest mit dem Sensor verbunden sind, werden bei der Kalibrierung mit erfaßt.

Einschränkend muß bemerkt werden, daß das Verfahren nicht für alle Magnetometer anwendbar ist. Nur dreikomponentige Systeme können kalibriert werden. Das Magnetometer muß weiterhin den kompletten Meßbereich abdecken. Die Meßgenauigkeit wird durch die Inhomogenität des Feldes begrenzt. Speziell in Spulensystemen (bei kompensierten Feldern) ist die Inhomogenität des Feldes bei großräumigen Sensoren nicht vernachlässigbar. Steht der Feldbetrag als zusätzliche Information nicht zur Verfügung, liefert das Verfahren die Skalenwerte nur relativ. Setzt man den Feldbetrag durch eine Messung mit einem Protonenmagnetometer als bekannt voraus, können Skalenwerte mit Ausnahme des Vorzeichens auch absolut bestimmt werden.

Die Meßergebnisse haben gezeigt, daß die Genauigkeit der Fehlerbestimmung mit dem vorgestellten Verfahren der Kalibriergenauigkeit in Spulensystemen in keiner Weise nachsteht, aber wesentlich unkomplizierter zu handhaben ist. Somit sollte die Kalibrierung von Fluxgate Magnetometern unter Ausnutzung einer Bewegung des Sensors im homogenen Feld eine äußerst praktikable Ergänzung zu bisherigen Kalibriermethoden sein.

7 Literaturverzeichnis

- Acuna, M. (1981). MAGSAT - Vector Magnetometer Absolute Sensor Alignment Determination. *NASA Technical Memorandum*(79648).
- Acuna, M. H. (1974). Fluxgate Magnetometers for Outer Planet Exploration. *IEEE Transactions on Magnetism* MAG-10: 519-523.
- Afanasev, J. (1986). ferrosondowaie priborui. Leningrad, *Energoatomisat*.
- Auster, H. U., K. H. Fornacon, J. Rustenbach, T. Roatsch, R. Schrödter, K. Schwingenschuh und V. Auster (1990). The Magnetic Properties of the Soviet Spacecraft Phobos 2. *Geophys. Res. Lett* 17: 881.
- Auster, H. U., A. Lichopoj, J. Rustenbach, H. Bitterlich, K. H. Fornacon, O. Hillenmaier, R. Krause, H. J. Schenk und V. Auster (1995). Concept and First Results of a Digital Fluxgate Magnetometer. *Meas. Sci. Technol* 6: 477-481.
- Auster, V. (1961). Vorschläge zur Bestimmung der Deviationskoeffizienten mit einem Dreikomponenten-Meßgerät. *Sonderheft zum 70jährigen Bestehen des Geomagnetischen Instituts Potsdam*.
- Bartsch, H. J. (1962). Mathematische Formeln. Leipzig, *VEB Fachbuchverlag*.
- Baumjohann, W. und R. A. Treumann (1997). Basic Space Plasma Physics. London, *Imperial College Press*.
- Belcher, J. W. (1973). A Variation of the Davis-Smith Method for In-Flight Determination of Spacecraft Magnetic Fields. *Journal of Geophysical Research* 78(28).
- Bronstein, I. N. und K. A. Semendjajew (1960). Taschenbuch der Mathematik. Leipzig, *BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft*.
- Chapman, S., J. Bartels (1951). Geomagnetism. London, *Oxford University Press*.
- Davenport, P. B., W. M. Rumpl und G. L. Welter In-Flight Determination of Spacecraft Magnetic Bias Independent of Attitude. .
- Davis, L. und E. J. Smith (1968). The inflight determination of spacecraft field zeros. *Eos Trans., AGU*, 49, 257.
- Fanslau, G. (1960). Geomagnetismus und Aeronomie, Band II, Geomagnetische Instrumente und Meßmethoden. Berlin, *VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften*.
- Feldtkeller, R. (1943). Zur Berechnung von Magnetfeldmeßgeräten mit Förstersonden. *Schriften d. Dt. Akad. f. Luftfahrtforschung*(1067/43g).
- Flügge, S. (1971). Handbuch der Physik. Berlin, *Springer Verlag*.
- Forkert, J., W. Schlesok (1986). Die Bestimmung der gyromagnetischen Konstante als Basis für eine genaue Darstellung des Ampere. *Metrologische Abhandlungen* 6: 165-175.
- Fornacon, K. H., H. U. Auster, E. Georgescu, W. Baumjohann, K. H. Glassmeier, J. Rustenbach und M. Dunlop (1999). The Magnetic Field Experiment onboard Equator-S and its Scientific Possibilities. *Annales Geophysicae* 17, 1521-27.
- Gordon, D. I. und R. E. Brown (1972). Recent Advances in Fluxgate Magnetometry. *IEEE Transactions on Magnetism* MAG-8(No. 1).
- Grammel, R. (1920). Der Kreisels, Seine Theorie und seine Anwendung. Stuttgart, *F. Vieweg & Sohn, Braunschweig*.

- Harborth, B. (1991). Bestimmung der Achsrichtungen von Inklinometer und Magnetometer einer Bohrlochsonde. *Diplomarbeit am IGM der TU-Braunschweig*.
- Hedgecock, P. C. (1975). A correlation Technique for Magnetometer Zero Level Determination. *Space Science Instruments*(1, 83).
- Jacobs, J. A. (1987). Geomagnetism, *Academic Press*.
- Kertz, W., H. Lauche und A. Maier (1968). Magnetsrode, Lage und Einrichtung des Magnetischen Laboratoriums des Instituts. *GAMMA 1*(IGM der TU Braunschweig).
- Kügler, H. (1991). Untersuchungen zur Querfeldbeeinflussung von Fluxgate-Magnetometern anhand der Kalibrierung des TEMAG-Experimentes. *Diplomarbeit am IGM der TU-Braunschweig*.
- Lerner, G. M. und M. D. Shuster (1979). Magnetometer Bias Determination and Attitude Determination for Near-Earth Spacecraft. .
- Linth, H. J. (1998). Results of the Comparison Measurements and the Variometer Test, Recordings during the VII'th IAGA Workshop on Geomagnetic Observatory Instruments. *GFZ Scientific Technical Report*(STR98/21).
- Magnes, W. (1999). Das ChiMAG Magnetometer. Graz, *Österreichische Akademie der Wissenschaften, IWF*.
- Markgraf, S., K. H. Glassmeier und G. Musmann (1996). Some Methods for Magnetometer Zero-Level Determination. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 34(3).
- Marshall, S. V. (1967). An Analytic Model for the Fluxgate Magnetometer. *Magnetometer IEEE Transactions on Magnetism* MAG-3: 459-463.
- Merayo, J. M. G., P. Brauer, F. Primdahl, J. R. Petersen und O. V. Nielsen (1999). Scalar Calibration of Vector Magnetometers. *Meas. Sci. Technol.*(in press).
- Ness, N. F., K. W. Behannon, R. P. Lepping und K. H. Schatten (1971). Use of Two Magnetometers for Magnetic Field Measurements on a Spacecraft. *J. Geophys. Research* 76: 3564-3573.
- Neubauer, F. (1975). Optimization of Multimagnetometer Systems on a Spacecraft. *J. Geophys. Research* 80(22).
- Nielsen, O. V., J. R. Pedersen, F. Primdahl, P. Brauer, B. Hernando, A. Fernandez, J. M. G. Merayo und P. Ripka (1995). Development, construction and Analysis of the Oersted Fluxgate Magnetometer. *Meas. Sci. Technol.* 6: 1099-1115.
- Primdahl, F. (1970). The Fluxgate Mechanism, Part I: the Gating Curves of Parallel and Orthogonal Fluxes. *IEEE Transactions on Magnetism* MAG-6: 376-383.
- Primdahl, F. (1979). The fluxgate Magnetometer. *J. Phys. E: Sci. Instrum.* 12.
- Primdahl, F., H. Lühr und E. K. Lauridsen (1992). The effect of Large Uncompensated Transverse Fields on the Fluxgate Magnetometer Output. *internal paper*.
- Rasson, J. L. (1996). Tests and Intercomparisons of Geomagnetic Instrumentation at the VIth Workshop of Magnetic Observatory Instruments, Data Acquisition and Processing. .
- Schmidt, A. (1912). Das magnetische Observatorium. *Königl. Preuß. Met. Instituts Veröffentlichung* 253.
- Wurm, M. (1950). Beiträge zur Theorie und Praxis des Feldstärkedifferenzmessers für magnetische Felder nach Förster. *Zeitschrift für angewandte Physik* 5.

Danksagung:

Ich danke Herrn Prof. Karl-Heinz Glaßmeier und Herrn Prof. Uwe Motschmann für die gute Betreuung meiner Arbeit. Vor allem aber bedanke ich mich für die Mühe, die sie in die Umschulung eines Diplomingenieurs investierten. Sie verstanden es, neben der Begeisterung auch ein wenig das Verständnis für die Physik zu wecken.

Herrn Prof. Haerendel danke ich sowohl für die finanzielle Unterstützung meiner Arbeiten in Braunschweig mit MPG Mitteln als auch für die Möglichkeit, in Berlin begonnene Projekte für die Satelliten Equator-S und Rosetta in Braunschweig weiterführen zu können. Bei der DLR, namentlich bei Herrn Dr. Schmitz, möchte ich mich für die konstruktive Zusammenarbeit mit unseren Geldgebern bedanken, die eine Vielzahl von experimentellen Arbeiten der vergangenen Jahre erst ermöglichten. Ohne die finanzielle Unterstützung durch die DLR (ehemals DARA) hätte es weder die Experimente noch die Daten gegeben, auf die diese Arbeit aufbauen konnte.

Ich bedanke mich bei Edita Georgescu, Karl-Heinz Fornacon und meinem Vater für die fachlich anregende und freundschaftliche Zusammenarbeit. Unzählige Diskussionen haben hoffentlich nicht nur mir weitergeholfen.

Für die tatkräftige Unterstützung in allen Hardware - Fragen und für die Bereitstellung des Polarsternmagnetometers möchte ich mich bei Olaf Hillenmaier und Ronald Kroth bedanken. Mein Dank gilt Jürgen Rustenbach, der mir in Berlin immer die Möglichkeit einräumte, meine Vorstellungen in Projekte einzubringen.

Weiterhin möchte ich mich für die hilfreichen Diskussionen mit unseren Grazer Kollegen bedanken. Stellvertretend seien Werner Magnes und Gerhard Berghofer genannt.

Sowohl in Berlin als auch in Braunschweig hatte ich das Glück, in einem wissenschaftlich aktiven, perfekt funktionierenden und vor allem zwischenmenschlich harmonisierenden Umfeld arbeiten zu können. Die offene, freundliche Arbeitsatmosphäre war für mich eine große Unterstützung.

Nicht zuletzt möchte ich mich bei meine Familie bedanken. Sie tolerierte, daß der Ehemann und Vater Beruf und Hobby nicht auseinanderhalten kann.

Curriculum vitae

Personalien:

Name	Hans-Ulrich Auster
Geburtsdatum	27.05.59
Geburtsort	Belzig
Staatsangehörigkeit	deutsch
Eltern	Dr. Volker Auster
	Dr. Christa Auster, geb. Haentschke
Familienstand	verheiratet mit Regine Auster, geb. Müller
	zwei Kinder: Sarah, Felix

Schulbildung:

"Robert Koch" Oberschule in Niemegk	1965 - 1973
Erweiterte Oberschule "Geschwister Scholl" in Belzig	1973 - 1977
Abitur	1977

Wehrdienst:

Ableistung Wehrdienst bei NVA (Panzerfahrer)	1977-1980
--	-----------

Hochschulbildung:

Studium an der Technischen Universität Dresden,	1980 - 1985
Fachrichtung Elektronischer Gerätebau	
Ingenieur-Abschluß mit Diplom	1985

Berufliche Tätigkeit:

wissenschaftlicher Mitarbeiter im Institut für Kosmosforschung der AdW der DDR	1985 - 1991
wissenschaftlicher Mitarbeiter im Max-Planck Institut für extraterrestrische Physik, Außenstelle Berlin	1991 - 1996
wissenschaftlicher Mitarbeiter an der TU Braunschweig	ab 1997

Arbeitsfeld:

Experimentvorbereitung, Kalibrierung, Experimentbetreuung, Datenprimäranalyse, Dateninterpretation, magnetische Vermessung und Modellierung von Satelliten, Erarbeitung von Experimentkonzeptionen (Digitalmagnetometer), Experimentmanagement,

Experimentbeteiligungen:

- PI: Rosetta Lander Magnetometer ROMAP (Start 2003)
- CoI: Magnetometer auf Phobos II (1988), Interball Tailprobe (1995), Interball Aurora Probe (1996), Mars-96, EQUATOR-S (1997), MIR 1998, Magnetorquer auf EQUATOR-S (1997),